गणित

कक्षा XI के लिए पाठ्यपुस्तक

भाग II

(द्वितीय सत्र)

लेखक

अनूप राजपूत — राम अवतार
जी.डी. ढल — एस.के. कौशिक
हुकुम सिंह — एस.के. भाम्बरी
एम.ए. पठान — एस.के.एस. गौतम
मोहन लाल — सुरजा कुमारी
पी.के. जैन — वी.पी. सिंह

रूपान्तरणकर्ता

आर.एस. लाल — प्रभाकर मिश्रा
सुमत कुमार जैन

संपादक

हुकुम सिंह — राम अवतार
वी.पी. सिंह

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

प्रथम संस्करण
फरवरी 2003
फाल्गुन 1924

PD 5T BB

ISBN 81-7450-049-0
ISBN 81-7450-050-2 (भाग 2)

एन.सी.ई.आर.टी. के प्रकाशन विभाग के कार्यालय

एन.सी.ई.आर.टी. कैम्पस	108, 100 फीट रोड, होस्डेकेरे	नवजीवन ट्रस्ट भवन	सी.डब्लू.सी. कैम्पस
श्री अरविंद मार्ग	हेली एक्सटेंशन बनाशंकरी III इस्टेज	डाकघर नवजीवन	32, बी.टी. रोड, सुखचर
नई दिल्ली 110 016	**बैंगलूर 560 085**	**अहमदाबाद 380 014**	**24 परगना 743 179**

प्रकाशन सहयोग

संपादन : बिनॉय बैनर्जी
उत्पादन : कल्याण बैनर्जी
राजेश पिप्पल
सज्जा : अमित श्रीवास्तव
आवरण : शशी भट्‌ट

रु : 70.00

एन. सी. ई. आर. टी. वाटर मार्क 70 जी एस एम पेपर पर मुद्रित

प्रकाशन विभाग में सचिव, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, श्री अरविंद मार्ग, नई दिल्ली 110 016 द्वारा प्रकाशित तथा मैसर्स अरावली प्रिन्टर्स एण्ड पब्लिशर्स (प्रा.) लि., W-30, ओखला इण्डस्ट्रियल एरिया, फेस II, नई दिल्ली 110020 द्वारा मुद्रित।

प्राक्कथन

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् विगत चार दशकों से पाठ्चर्या के नवीनीकरण तथा विकास के क्षेत्र में कार्यरत रही है। इसी दिशा में किये जा रहे प्रयासों की श्रृंखला में परिषद् ने हाल ही में विद्यालयी शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (2000) का प्रकाशन किया जिसके अन्तर्गत पाठ्यक्रम सम्बन्धी विभिन्न संदर्भों तथा महत्वपूर्ण पक्षों पर ध्यान दिया गया है। इस नीतिगत दस्तावेज में विज्ञान तथा गणित की शिक्षा–पद्धति में गुणात्मक सुधार की आवश्यकता पर बल दिया गया है। इसी संदर्भ में परिषद् ने उच्चतर माध्यमिक स्तर पर गणित विषय की शिक्षा–पद्धति में सुधार हेतु नया पाठ्यक्रम तथा मार्गदर्शक सिद्धान्त तैयार किये जो छात्रों के विभिन्न वर्गों की अपेक्षाओं तथा आवश्यकताओं को ध्यान में रखकर बनाये गये हैं। राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा के अनुसार पाठ्यक्रम को चार सत्रों में पढ़ाया जाना है। प्रथम सत्र में 11 अध्याय हैं जो कि अनिवार्य हैं। शेष तीन सत्रों को A, B, तथा C भागों में विभक्त किया गया है। भाग A सभी विद्यार्थियों के लिए अनिवार्य है तथा भाग B एवं भाग C ऐच्छिक हैं जिनमें से किसी एक का चुनाव विद्यार्थी विज्ञान तथा गैर विज्ञान की पृष्ठभूमि को आधार बनाकर अपने भविष्य की आवश्यकताओं को ध्यान में रखकर कर सकते हैं। इस प्रकार कोई भी छात्र इस पद्धति में अपनी रूचि के अनुसार भाग A और B अथवा भाग A और C में से किसी एक विकल्प का चयन कर सकता है। सत्र I और II के पाठ्यक्रम कक्षा XI के छात्रों को तथा सत्र III और IV के पाठ्यक्रम कक्षा XII के छात्रों को पढ़ाये जायेंगे।

इस पाठ्यक्रम का प्रथम प्रारूप एक लेखक मंडल द्वारा तैयार किया गया जिसके कुछ सदस्य परिषद् में कार्यरत हैं तथा अन्य बाह्य संस्थाओं से संबंधित हैं। इसके पश्चात् इस प्रारूप को मूल्यांकन और समीक्षा हेतु एक कार्यशाला में अनेक विशेषज्ञों तथा अध्यापकों के समक्ष प्रस्तुत किया गया जिनके द्वारा दिये गये महत्वपूर्ण सुझावों को इस प्रारूप में समायोजित किया गया। अन्ततः प्रकाशन से पूर्व पुस्तक की पांडुलिपि को विशेषज्ञों के एक समूह द्वारा संपादित किया गया।

लेखक मंडल ने उच्चतर माध्यमिक स्तर पर परिषद् द्वारा प्रकाशित पिछली गणित की पुस्तकों को संदर्भ में लिया है तथा इन पुस्तकों का उपयोग करने वालों से प्राप्त सुझावों का समुचित उपयोग करने का भी प्रयास किया है। मैं लेखक मंडल के सभी सदस्यों, मूल्यांकन हेतु आयोजित कार्यशाला में सम्मिलित सभी अध्यापकों एवं विशेषज्ञों द्वारा महत्वपूर्ण योगदान तथा

सुझावों के लिए धन्यवाद व्यक्त करता हूँ। विशेष रूप से मैं लेखक मंडल के अध्यक्ष, दिल्ली विश्वविद्यालय के प्रो. पवन कुमार जैन के प्रति कृतज्ञ हूँ जिनके कुशल शैक्षिक मार्ग–दर्शन में यह कार्य सम्पन्न हुआ।

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् इस पुस्तक में भावी संशोधन तथा परिष्कार हेतु पाठकों के महत्वपूर्ण सुझावों तथा परामर्शो का स्वागत करती है।

जे.एस. राजपूत
निदेशक
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्

नई दिल्ली
जुलाई 2002

प्रस्तावना

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् द्वारा उच्चतर माध्यमिक स्तर पर गणित विषय से सम्बन्धित नये दिशानिर्देश तथा पाठ्यक्रम 2001 के अनुरूप पाठ्यपुस्तक तैयार करने के उद्देश्य से एक लेखक मंडल का गठन किया गया। इस मंडल के सदस्यों द्वारा गहन चिंतन तथा व्यापक योजना के आधार पर एक विस्तृत रूपरेखा तैयार की गई।

गहन अध्ययन–विश्लेषण के उपरांत इस लेखक मंडल के विशेषज्ञों द्वारा इस परियोजना का प्रथम प्रारूप तैयार किया गया जिसमें परिषद् की ओर से प्रो. हुकुम सिंह, प्रो. सुरजा कुमारी, डा. राम अवतार, डा. वी.पी. सिंह, डा. एस.के.एस. गौतम, डा. अनूप राजपूत तथा डा. एम.ए. पठान, श्री मोहन लाल, श्री जी.डी. ढल, डा. एस.के. कौशिक, डा. एस.के. भाम्बरी बाह्य विशेषज्ञ के रूप में मेरे सहयोगी थे। इसके उपरान्त अनेक बैठकों में इस प्रारूप पर विभिन्न बिन्दुओं पर गहन विचार विमर्श किया गया। इसके पश्चात् एक राष्ट्रीय कार्यशाला में गठित विषय के अनुभवी अध्यापकों तथा विशेषज्ञों के समक्ष इस प्रारूप को समीक्षा एवं मूल्यांकन के लिए प्रस्तुत किया गया। इस कार्यशाला में सामने उभर कर आये महत्वपूर्ण सुझावों एवं परामर्शों को इस परियोजना के द्वितीय प्रारूप में समायोजित किया गया, जिसका परिष्कृत रूप आपके समक्ष पुस्तक के रूप में प्रस्तुत किया जा रहा है।

इस पुस्तक की सर्वाधिक महत्वपूर्ण विशेषता जो विशेषरूप से उल्लेखनीय है – वह यह है कि इस पुस्तक की सामग्री को हमने अनेक सरल उदाहरणों तथा अभ्यास प्रश्नों के माध्यम से सरल–सुबोध बनाने का प्रयास किया है। गणित की अनेक संकल्पनाओं तथा अवधारणाओं को छात्रोपयोगी बनाने की दिशा में हमने इन संकल्पनाओं तथा अवधारणाओं के व्यवहारिक प्रयोग भी प्रस्तुत किये हैं। यह प्रयास गणित की उपयोगिता को छात्रों के समक्ष प्रस्तुत करेगा और उनमें गणित के प्रति रुचि उत्पन्न करने में प्रेरणादायक होगा। इस पुस्तक में चयनित पाठ्य सामग्री छात्रों की विभिन्न क्षमताओं तथा अपेक्षाओं के अनुरूप सिद्ध होगी।

इस पुस्तक की कुछ महत्वपूर्ण उपलब्धियों तथा विशेषताएँ निम्न हैं –

1. प्रत्येक अध्याय का आरम्भ विषय के संक्षिप्त परिचय से किया गया है जो छात्रों में विषय के प्रति रुचि जाग्रत करने तथा उसका संवर्धन करने में सहायक है।

2. इस पुस्तक में 600 से भी अधिक उदाहरण तथा 250 के लगभग आकृतियाँ दी गई हैं जो सामान्यतः अन्य पुस्तक में दृष्टिगोचर नहीं होती।
3. इस पुस्तक में 1700 अभ्यास प्रश्न दिये गये हैं जो सिद्धांत तथा व्यवहार दोनों पक्षों पर समान रूप से बल देते हैं इसके साथ ही प्रत्येक अध्याय के अंत में विविध प्रश्नावली शीर्षक के अन्तर्गत मिश्रित प्रश्न दिये गये हैं।
4. इस पुस्तक में अनुप्रयोगों से संबंधित अनेक प्रश्न भी प्रस्तुत किये गये हैं।
5. अधिकांशतः सभी अध्याय ऐतिहासिक टिप्पणियों के साथ समाप्त होते हैं। ये टिप्पणियाँ पुस्तक को रूचिकर बनाने में तो सहायक है ही, प्रस्तुत विषय–सामग्री की ऐतिहासिक पृष्ठभूमि तथा महत्व को भी रेखांकित करती हैं।

मैं विशेष रूप से राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् के निदेशक प्रो. जे.एस. राजपूत का आभारी हूँ जिन्होंने इस पुस्तक के निर्माण हेतु इस लेखक मंडल का गठन किया तथा मुझे इस कार्य में सहभागिता का निमंत्रण देकर गणित की शिक्षा पद्धति में संशोधन करने का अवसर प्रदान किया। इस चुनौतीपूर्ण कार्य को संपन्न करने में उनके द्वारा प्रदत्त स्वस्थ वातावरण तथा अनुकूल परिस्थितियों ने आनंददायक बनाया।

इसके साथ ही मैं इस पुस्तक के लेखक मंडल के समस्त सदस्यों के प्रति आभार व्यक्त करता हूँ, जिन्होंने अपना मूल्यवान समय देकर पुस्तक को तैयार किया। उन शिक्षकों तथा विशेषज्ञों का भी मैं हृदय से आभारी हूँ जिनके सुझाव हमें समय–समय पर प्राप्त होते रहे। परिषद् के संयुक्त निदेशक प्रो. एम.एस. खापर्डे, विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग के अध्यक्ष प्रो. आर.डी. शुक्ल का भी मैं हृदय से आभारी हूँ जिनका बहुमूल्य सहयोग मुझे तथा लेखक मंडल को सदैव प्राप्त होता रहा।

मैं विशेष रूप से आभारी तथा ऋणी हूँ लेखक मंडल के संयोजक प्रो. हुकुम सिंह का जिनके सहयोग तथा समन्वय के बिना इस परियोजना का पूर्ण होना संभव नहीं था। उन्होंने एक कुशल संयोजक के रूप में इस कार्य के निर्वाह में सक्रिय तथा सृजनात्मक भूमिका का निर्वाह किया। मैं प्रो. सुरजा कुमारी, डा. राम अवतार, डा. वी.पी. सिंह, डा. एस.के.एस. गौतम तथा डा. अनूप राजपूत के प्रति आभार व्यक्त करता हूँ जिन्होंने इस ग्रंथ की प्रकाशन योग्य पांडुलिपि तैयार करने में अथक परिश्रम किया।

इस पाठ्यपुस्तक का हिन्दी रूपान्तरण प्रो. आर.एस. लाल, प्रो. प्रभाकर मिश्र और श्री सुमत कुमार जैन ने किया है। हिन्दी पांडुलिपि का विषय संपादन प्रो. हुकुम सिंह, डा. राम अवतार और डा. वी.पी. सिंह ने किया। मैं इन सभी का आभारी हूँ।

इसके अतिरिक्त मैं कंप्यूटर सहायक श्री नरेन्द्र कुमार के प्रति भी धन्यवाद व्यक्त करता हूँ जिन्होंने हस्तलिखित सामग्री को टंकित किया।

इस पुस्तक में हम संशोधन–सुधार के लिए पाठकों के अमूल्य सुझावों का स्वागत करेंगे।

पवन कुमार जैन
अध्यक्ष
लेखक दल

लेखक और प्रतिभागी
पाठ्यपुस्तक के विकास और समीक्षा हेतु कार्यशाला

प्रो. पी.के. जैन (अध्यक्ष)
गणित विभाग
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

ए.एस. मिश्रा
पी.जी.टी.
जवाहर नवोदय विद्यालय, डाभासेमर
फैजाबाद, उत्तर प्रदेश

अनीता शर्मा
पी.जी.टी.
हन्स राज मॉडल स्कूल
पंजाबी बांग, नई दिल्ली

आशा मिश्रा
पी.जी.टी.
केन्द्रीय विद्यालय
आई.आई.टी. कल्यानपुर
कानपुर, उत्तर प्रदेश

जी.डी. ढल
अवकाश प्राप्त रीडर (एन सी ई आर टी)
के–171, एल.आई.सी. कालोनी
पश्चिम विहार, नई दिल्ली

ज्योती दास
प्रोफेसर गणित विभाग
कलकत्ता विश्वविद्यालय,
कोलकाता

के.एस. मान्नावानी
लेक्चरर
राजकीय मॉडल स्कूल, टी.टी. नगर
भोपाल, मध्य प्रदेश

एम.ए. पठान
प्रोफेसर गणित विभाग
अलीगढ़ मुस्लिम विश्वविद्यालय
अलीगढ़, उत्तर प्रदेश

मिलिन्द मनोहर खचोने
पी.जी.टी.
डी.ए.वी. पब्लिक स्कूल
गुड़गांव, हरियाणा

मोहन लाल
(अवकाश प्राप्त प्राचार्य)
डी.ए.वी. कालेज मैनेजमेंन्ट कमेटी
ई–182, राजिन्दर नगर, नई दिल्ली

एन.के. चौहान
पी. जी. टी.
केन्द्रीय विद्यालय
जे. एन. यू. कैम्पस, नई दिल्ली

पी. के. तिवारी
अवकाश प्राप्त सहायक कमिश्नर
केन्द्रीय विद्यालय संगठन
फ्लैट नं. O-460, जलवायु विहार
सेक्टर 30, गुड़गांव, हरियाणा

पूरन सिंह
पी.जी.टी.
जवाहर नवोदय विद्यालय, जटरोड़ा
सवाई माधोपुर, राजस्थान

आर.एस. गर्ग
पी.जी.टी.
केन्द्रीय विद्यालय, मुराद नगर
गाजियाबाद, उत्तर प्रदेश

सस्मिता मिश्र
पी.जी.टी.
केन्द्रीय विद्यालय, रायवाला
देहरादून, उत्तरांचल

शालनी दीक्षित
पी.जी.टी.
केन्द्रीय विद्यालय, न्यू कैंट
इलाहाबाद, उत्तर प्रदेश

शारदा रानी
पी.जी.टी.
सी.एल. भल्ला दयानन्द मॉडल स्कूल
झंडेवालान, करोलबाग, नई दिल्ली

सुशीला गर्ग
पी.जी.टी.
सर्वोदय विद्यालय, जोरबाग
नई दिल्ली

एस.के. भाम्बरी
रीडर, किरोड़ीमल कालेज
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

एस.के. कौशिक
रीडर, किरोड़ीमल कालेज
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

यू.वी. तिवारी
प्रोफेसर, गणित विभाग
आई.आई.टी. कानपुर, उत्तर प्रदेश

एन.सी.ई.आर.टी. संकाय

अनूप राजपूत

के.ए.एस.एस.वी.कामेश्वर राव

महेन्द्र शंकर

राम अवतार

आर.पी. मौर्या

एस.के.एस. गौतम

वी.पी. सिंह

(श्रीमती) सुरजा कुमारी

हुकुम सिंह **(संयोजक)**

रूपान्तरणकर्ता और प्रतिभागी
पाठ्यपुस्तक का हिन्दी रूपान्तरण एवं समीक्षा हेतु कार्यशाला

आर.एस. गर्ग
पी.जी.टी., केन्द्रीय विद्यालय, मुरादनगर,
उत्तर प्रदेश

आर.एस. चौहान
अवकाश प्राप्त प्रोफेसर
ए–35, कस्तूरबा नगर, भोपाल
मध्य प्रदेश

रविन्दर सिंह पवांर
पी.जी.टी.
एम.बी.डी.ए.वी. उच्चतर माध्यमिक विद्यालय
यूसूफ सराय, नई दिल्ली

रमाशंकर लाल
(अवकाश प्राप्त प्रोफेसर एवं अध्यक्ष)
गणित विभाग
डी.ए.वी.पी.जी. कालेज, सिवान
बिहार

प्रभाकर मिश्रा
बी–18, गोविन्दपुर कालोनी, इलाहाबाद
उत्तर प्रदेश

जी.डी. ढल
के–171, एल.आई.सी. कालोनी
पश्चिम विहार, नई दिल्ली

वेद डुडेजा
उप प्राचार्य
राजकीय कन्या माध्यमिक विद्यालय
सैनिक विहार, दिल्ली

सुमत कुमार जैन
लेक्चरर, गणित
के.एल. जैन इंटर कालेज, ससनी
हाथरस, उत्तर प्रदेश

आर.पी. गिहारे
लेक्चरर, राजकीय कन्या उच्चतर
माध्यमिक विद्यालय, चिचोली, बेतुल, मध्य प्रदेश

एन.के. चौहान
पी.जी.टी., केन्द्रीय विद्यालय,
जे.एन.यू. कैम्पस, नई दिल्ली

पी.डी. चतुर्वेदी
पी.जी.टी., केन्द्रीय विद्यालय, सेक्टर–2
आर.के. पुरम्, नई दिल्ली

पी.के. जैन
गणित विभाग
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

पी.के. तिवारी
अवकाश प्राप्त सहायक कमिश्नर
केन्द्रीय विद्यालय संगठन
फ्लैट नं. O-460, जलवायु विहार
सेक्टर–30, गुड़गांव, हरियाणा

एन.सी.ई.आर.टी. संकाय
राम अवतार
वी.पी. सिंह
(श्रीमती) सुरजा कुमारी
हुकुम सिंह **(संयोजक)**

विषय–सूची भाग I

विषय–सूची

भाग क

भाग ख

भाग क (अध्याय 12 - 19)
सभी विद्यार्थियों के लिए

वृत्त (CIRCLES)

अध्याय 12

12.1 भूमिका

पिछले अध्यायों में हमारा अध्ययन द्विविमीय ज्यामिति में केवल सरल रेखाओं तक सीमित था। किन्तु वक्र भी सरल रेखाओं की तरह महत्वपूर्ण हैं। सभी वक्रों में, वृत्त सरलतम है और प्रकृति, भवन–निर्माण शिल्प, विज्ञान और उद्योग में सबसे अधिक पाया जाता है। हम सर्वत्र वृत्तों के अनुप्रयोग देखते हैं। हमारे प्रतिदिन के जीवन में चक्रीय पहिया इतना अधिक महत्वपूर्ण है कि इसके बिना जीवन क्रियात्मक रूप से ठहर जाएगा। आटोमोबाइल्स विलुप्त हो जाएँगे, रेलगाड़ियों का चलना रुक जाएगा और सभी प्रकार का निर्माण समाप्त हो जाएगा। इसलिए, इसके अध्ययन पर ध्यान देना आवश्यक है। प्रारम्भिक कक्षाओं में हमने वृत्तों और उनके कुछ ज्यामितीय गुणधर्मों का अध्ययन किया है। इस अध्याय में हम वृत्त के समीकरणों के विभिन्न रूपों और उनके स्पर्शियों के समीकरण तथा वैश्लेषिक विधियों के प्रयोग से उनके गुणधर्मों को व्युत्पन्न करेंगें।

12.2 वृत्त के समीकरण का मानक रूप

पिछले अध्याय में, हमने निर्देशांक तल में किसी भी स्थिति में रेखा के समीकरण को लिखना सीखा है। इस अनुभाग में हम देखेंगे कि यदि वृत के केन्द्र की स्थिति तथा उसकी त्रिज्या की लम्बाई ज्ञात हो, तो वृत्त का समीकरण लिखना सरल है। हम सर्वप्रथम वृत्त की परिभाषा प्रस्तुत करते हैं।

परिभाषा 1 वृत्त तल के उन बिन्दुओं का समुच्चय है जिनकी तल के एक स्थिर बिन्दु से दूरियाँ अचर होती है। स्थिर बिन्दु को वृत्त का **केन्द्र** (centre) तथा अचर दूरी को वृत्त की **त्रिज्या** (radius) कहते हैं।

हम अब ज्ञात केन्द्र तथा त्रिज्या के वृत्त का समीकरण व्युत्पन्न करेंगे।

12.2.1 *केन्द्र $C(h, k)$ तथा त्रिज्या r के वृत्त का समीकरण ज्ञात करना*

मान लीजिए वृत्त पर कोई बिन्दु $P(x, y)$ है (आकृति 12.1)। बिन्दु $P(x, y)$ को केन्द्र $C(h, k)$ से मिलाया। तब, परिभाषा से $|CP| = r$

दूरी सूत्र द्वारा

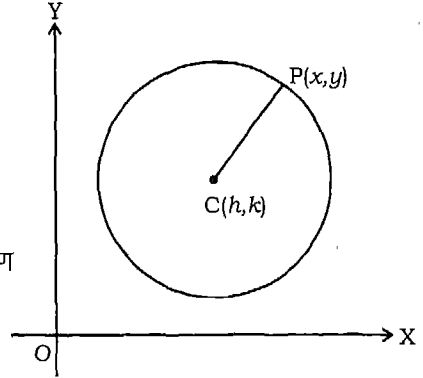
$$|CP| = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

इसलिए $\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$

या $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

अतः, केन्द्र (h, k) तथा त्रिज्या r के वृत्त का समीकरण

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \quad ...(1)$$

है।

आकृति 12.1

उपप्रमेय केन्द्र मूलबिन्दु O (0, 0) पर तथा त्रिज्या r के वृत्त का समीकरण

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad ...(2)$$

है।

उदाहरण 1 केन्द्र $(-3, 2)$ तथा त्रिज्या 5 के वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ केन्द्र $(h, k) \equiv (-3, 2)$ तथा त्रिज्या 5 है। अतः, (1) में $h = -3, k = 2, r = 5$ प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैं

$$\{x - (-3)\}^2 + (y-2)^2 = (5)^2$$

या $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 25$

या $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$

जो कि वृत्त का अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 2 वृत्त $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 8$ का केन्द्र तथा त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल दिया गया समीकरण $(x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) = 8$ है।

अब कोष्ठकों को पूर्ण वर्ग करने पर,

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 8 + 1 + 4$$

या $(x-1)^2 + (y+2)^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2$

इसे वृत्त के समीकरण से तुलना करने पर, हम देखते हैं कि वृत्त का केन्द्र $(1, -2)$ है और त्रिज्या $\sqrt{13}$ है।

उदाहरण 3 उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र $(2, -3)$ है और जो रेखाओं $3x + 2y = 11$ और $2x + 3y = 4$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर जाता है।

हल दी हुई रेखाएँ

$3x + 2y = 11$ और $2x + 3y = 4$ हैं।

इन दोनों समीकरणों को एक साथ हल करने पर, हम पाते हैं कि

$x = 5$, और $y = -2$

इस प्रकार, दी रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु, A $(5, -2)$ है। हमें ज्ञात है कि वृत्त का केन्द्र C $(2, -3)$ है और यह बिन्दु A $(5, -2)$ से हो कर जाता है। इसलिए,

त्रिज्या $= |CA| = \sqrt{(5-2)^2+(-2+3)^2} = \sqrt{10}$

अतः, वृत्त का समीकरण है।

$$(x-2)^2 + (y + 3)^2 = (\sqrt{10})^2$$

अर्थात् $\quad x^2 + y^2 - 4x + 6y + 3 = 0$

प्रश्नावली 12.1

निम्नलिखित वृत्तों में से प्रत्येक का समीकरण ज्ञात कीजिए :

1. केन्द्र $(0, -1)$ और त्रिज्या 1 है।

2. केन्द्र $(-3, -2)$ और त्रिज्या 7 है।

3. केन्द्र $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ और त्रिज्या $\frac{1}{12}$ है।

4. केन्द्र $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ और त्रिज्या $\frac{1}{\sqrt{2}}$ है।

5. केन्द्र (a, a) और त्रिज्या $a\sqrt{2}$ है।

6. केन्द्र $(a \cos \alpha, a \sin \alpha)$ और त्रिज्या a है।

निम्नलिखित वृत्तों (प्रश्न 7 से 11 तक) में से प्रत्येक का केन्द्र और त्रिज्या ज्ञात कीजिए :

7. $x^2 + (y-1)^2 = 2$

8. $(x + 5)^2 + (y-3)^2 = 30$

9. $(x-\frac{1}{2})^2 + (y+\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{4}$

10. $x^2+y^2-4x+6y=5$

11. $x^2+y^2-x+2y-3=0$

12. बिन्दु (2, 4) से जाने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र रेखाओं $x-y=4$ और $2x+3y=-7$ का प्रतिच्छेद बिन्दु है।

13. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र (2, – 3) है और जो रेखाओं $3x–2y=1$ और $4x+y=27$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से हो कर जाता है।

14. त्रिज्या 5 के उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र x – अक्ष पर हो और जो बिन्दु (2, 3) से जाता है।

15. त्रिज्या 5 के उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र y – अक्ष पर हो और जो बिन्दु (3, 2) से जाता है।

12.3 वृत्त का व्यापक समीकरण

पिछले अनुभाग में हमने देखा कि यदि वृत्त का केन्द्र (h, k) और त्रिज्या r है तो इसका समीकरण

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \qquad (1)$$

या $\quad x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$ है।

यह समीकरण

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \qquad (2)$$

के रूप का है,

जहाँ $\quad g=-h, f=-k,$ और $c=h^2+k^2-r^2$ है।

रूप (2) द्वारा दिये वृत्त के समीकरण को, जहाँ g, f और c स्वेच्छ वास्तविक संख्याएँ हैं, हम निम्न प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं

$$(x+g)^2+(y+f)^2=g^2+f^2-c$$

या $\quad (x-(-g))^2+(y-(-f))^2=\left(\sqrt{g^2+f^2-c}\right)^2$

इस प्रकार, यदि $g^2+f^2-c>0$, तो समीकरण (2), केन्द्र $(-g, -f)$ और त्रिज्या $\sqrt{g^2+f^2-c}$ वाले वृत्त को निरूपित करेगा।

इस प्रकार, समीकरण (2) वृत्त का *व्यापक समीकरण* है।

समीकरण (2) एक वृत्त निरूपित करता है यदि $g^2+f^2-c>0$ अर्थात् यदि $c<g^2+f^2$

यदि $c=g^2+f^2$, समीकरण केवल एक बिन्दु वृत्त को प्रदर्शित करता है, और यदि $c>g^2+f^2$, समीकरण (2) किसी वृत्त को निरूपित नहीं करता है, वास्तव में यह तल के किसी बिन्दु को प्रदर्शित नहीं करता है।

प्रेक्षण

1. ध्यान दीजिए कि

$$ax^2+ay^2+2bx+2dy+e=0; (a\neq 0)$$

के रूप का समीकरण इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$x^2+y^2+2\frac{b}{a}x+2\frac{d}{a}y+\frac{e}{a}=0$$

यह समीकरण (2) के रूप का है, जो एक वृत्त निरूपित करता है यदि $\frac{e}{a}<\frac{b^2+d^2}{a^2}$

जहाँ $\left(\frac{-b}{a},\frac{-d}{a}\right)$ वृत्त का केन्द्र तथा $\sqrt{\frac{b^2}{a^2}+\frac{d^2}{a^2}-\frac{e}{a}}$ वृत्त की त्रिज्या हैं।

2. यदि $c=0$ है तो, (2) से निरूपित वृत्त मूल बिन्दु से जाता है।

3. यदि $a\neq$ b, तब समीकरण

$$ax^2+by^2+2cx+2dy+e=0$$

को (2) के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है। अतः, यह एक वृत्त निरूपित नहीं करता है।

4. चूँकि वृत्त के व्यापक समीकरण $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ में तीन अचर g, f और c हैं, इसलिए वृत्त को अद्वितीय रूप से ज्ञात करने के लिए कम से कम तीन प्रतिबन्धों का होना आवश्यक है।

5. उपर्युक्त से, हम कह सकते हैं कि एक वृत्त के समीकरण के निम्नलिखित गुणधर्म होते हैं :

   (i) यह x और y में एक द्विघातीय समीकरण है।

   (ii) इसमें xy के रूप का कोई पद नहीं होता है।

   (iii) x^2 और y^2 के गुणांक सदैव समान होते हैं।

यदि वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ के रूप का है, तब निम्नलिखित नियमों को ध्यान में रखना चाहिए :

(i) केन्द्र $= [-\frac{1}{2}$ (x का गुणांक), $-\frac{1}{2}$(y का गुणांक)]

(ii) त्रिज्या $= \sqrt{\left(\frac{1}{2} x \text{ का गुणांक}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} y \text{ का गुणांक}\right)^2 - \text{अचर}}$

उदाहरणतः वृत्त

$$x^2 + y^2 - 8x - 12y - 48 = 0$$

के केन्द्र और त्रिज्या क्रमशः (4, 6) और 10 हैं और वृत्त

$$3x^2 + 3y^2 + 12x - 18y - 11 = 0$$

जिसे इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - \frac{11}{3} = 0$$

जिसका केन्द्र और त्रिज्या क्रमशः (–2, 3) और $\sqrt{\frac{50}{3}}$ हैं।

6. रूप (2) में दिये गए वृत्त के समीकरण को वृत्त का **कार्त्तीय समीकरण** (Cartesian Equation) भी कहते हैं।

उदाहरण 4 *बिन्दुओं (1, 0), (–1, 0) और (0, 1) से जाने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।*

हल वृत्त के व्यापक समीकरण

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

में तीनों बिन्दुओं के निर्देशांकों को क्रमशः प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है

$$2g + c = -1$$

$$-2g + c = -1$$

और $\quad 2f + c = -1$

इन युगपत समीकरणों के हल परिणामतः $g = 0, f = 0, c = -1$, हैं। इसलिए, दिये गए तीन बिन्दुओं से जाने वाले वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 = 1$ है।

उदाहरण 5 वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (1, 2), (3, –4), और (5, –6) से हो कर जाता है। इसका केन्द्र और त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि वृत्त का समीकरण

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad (1)$$

है।

चूँकि तीनों बिन्दु वृत्त पर स्थित हैं, अतः

$$2g + 4f + c = -5 \quad (2)$$

$$6g - 8f + c = -25 \quad (3)$$

$$10g - 12f + c = -61 \quad (4)$$

(3) में से (2) और (4) में से (3) घटाने पर, हमें प्राप्त होता है

$$4g - 12f = -20$$

और $\quad 4g - 4f = -36$

अतः $\quad f = -2, g = -11$

तब, समीकरण (2) से $c = 25$ प्राप्त होता है।

समीकरण (1) में इन मानों को रखने पर, अभीष्ट समीकरण

$$x^2 + y^2 - 22x - 4y + 25 = 0$$

है। इसका केन्द्र (11, 2) और त्रिज्या 10 है।

उदाहरण 6 वृत्त $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 9 = 0$ के संकेन्द्रीय उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (– 4, –5) से हो कर जाता है। (दो वृत्त जिनके केन्द्र एक समान हों, संकेन्द्रीय (Concentric) कहलाते हैं।)

हल दिए हुए वृत्त का केन्द्र (2, 3) है।

इसलिए, अभीष्ट वृत्त का केन्द्र (2, 3) है।

चूँकि वृत्त बिन्दु (– 4, –5) से होकर जाता है, इसकी

त्रिज्या = $\sqrt{(2+4)^2 + (3+5)^2} = 10$ [चूँकि (– 4, –5) वृत्त पर स्थित है, (– 4, –5) तथा केन्द्र (2, 3) के बीच की दूरी इसकी त्रिज्या है।]

अतः अभीष्ट वृत्त का समीकरण

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 100$$

या $\quad x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 100$

या $\quad x^2 + y^2 - 4x - 6y - 87 = 0$ है।

विकल्प विधि

अभीष्ट वृत्त, दिए वृत्त का संकेन्द्रीय है, इसलिए इसका केन्द्र (2, 3) है। इस प्रकार अभीष्ट वृत्त का समीकरण इस रूप में लिखा जा सकता है

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0$$

क्योंकि वृत्त (– 4, –5) से हो कर जाता है, अतः

$$c = -16 -25 -16 -30 = -87$$

अतः, अभीष्ट वृत्त का समीकरण

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 87 = 0$$

है।

प्रश्नावली 12.2

निम्नलिखित 1 से 3 तक प्रत्येक प्रश्न में वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए :

1. बिन्दुओं (1, –2), (5, 4) और (10, 5) से हो कर जाने वाला।

2. बिन्दुओं (2, –6), (6, 4) और (–3, 1) से हो कर जाने वाला।

3. बिन्दुओं (0, 0), (5, 0) और (3, 3) से हो कर जाने वाला।

4. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो उस त्रिभुज के परिगत है जिसके शीर्ष (–2, 3), (5, 2) और (6, –1) हैं।

5. वृत्त $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 11 = 0$ के संकेन्द्रीय उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (5, 4) से जाता है।

ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित प्रश्नों 6 से 10 तक प्रत्येक में दिया समीकरण एक वृत्त, एक बिन्दु वृत्त या कोई वृत्त नहीं निरूपित करता है।

6. $1 - x^2 - y^2 = 0$

7. $x^2 + y^2 + 2x + 1 = 0$

8. $x^2 + y^2 + x - y = 0$

9. $x^2 + y^2 + 2x + 10y + 26 = 0$

10. $x^2 + y^2 - 3x + 3y + 10 = 0$

11 से 14 तक प्रत्येक प्रश्न में वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए :

11. बिन्दुओं $(1, -1)$ से जाने वाले और जिसका केन्द्र रेखाओं $x - y = 4$ और $2x + 3y = -7$ के प्रतिच्छेद बिन्दु पर हो।

12. उस त्रिभुज के शीर्षों से जाने वाले जिसकी भुजाएं $x + y = 2$, $3x - 4y = 6$ और $x - y = 0$ के अनुदिश हों।

13. $(0, 0)$ से होकर जाए तथा x और y अक्षों पर क्रमशः a और b अन्तः खण्ड काटें।

14. जिसका केन्द्र (h, k) है और जो बिन्दु (p, q) से हो कर जाता है।

15. दिखाइए कि बिन्दु $(5, 5)$, $(6, 4)$, $(-2, 4)$ और $(7, 1)$ सभी एक वृत्त पर स्थित हैं। इस वृत्त का समीकरण, केन्द्र तथा त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

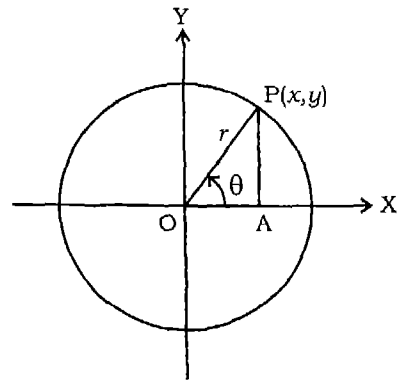
16. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो वृत्त $x^2 + y^2 + 8x + 10y - 7 = 0$ के केन्द्र से जाता है और वृत्त $2x^2 + 2y^2 - 8x - 12y - 9 = 0$ के संकेन्द्रीय हो।

12.4 प्राचल रूप (Parametric form) में वृत्त का समीकरण

12.4.1 ***वृत्त $x^2 + y^2 = r^2$ का प्राचल रूप*** मान लीजिए कि मूल बिन्दु पर केन्द्र वाला वृत्त C है और मान लीजिए कि इस पर कोई बिन्दु $P(x, y)$ (आकृति 12.2) है। मान लीजिए वृत्त C की त्रिज्या OP, x–अक्ष की धन दिशा से θ कोण बनाती है। P से x–अक्ष पर PA लम्ब डालिए।

इस प्रकार

$$x = OA = r\cos\theta \text{ (चूँकि } OP = r)$$
$$y = AP = r\sin\theta$$

यह वृत्त पर स्थित किसी बिन्दु के प्राचल θ के पदों में निर्देशांक हैं। ध्यान दीजिए कि यह सत्य है चाहे P द्वितीय, तृतीय या चतुर्थपाद में हों। वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 = r^2$, θ के 0 से 2π के सभी मानों के लिए $x = r\cos\theta$, और $y = r\sin\theta$ संतुष्ट होता है। इस प्रकार, $x = r\cos\theta$, और $y = r\sin\theta$, वृत्त $x^2 + y^2 = r^2$ के प्राचल θ, $0 \leq \theta < 2\pi$, के पदों में ***प्राचल समीकरण*** कहते हैं।

आकृति 12.2

12.4.2 वृत्त $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ का प्राचल समीकरण

आकृति 12.3 से, हम पाते हैं

$$CN = x - h \text{ और } NP = y - k$$

मान लीजिए आकृति 12.3 में दिखाए अनुसार $\angle NCP$, θ है,

तब समकोण त्रिभुज NCP में

आकृति 12.3

$$\cos\theta = \frac{CN}{CP} = \frac{x-h}{r} \text{ और } \sin\theta = \frac{PN}{PC} = \frac{y-k}{r}$$

इसलिए, $\quad x - h = r\cos\theta$ और $y - k = r\sin\theta$

अर्थात् $\quad x = h + r\cos\theta$ और $y = k + r\sin\theta$

इस प्रकार, वृत्त के प्रत्येक बिन्दु के संगत, θ का अद्वितीयतः अस्तित्व है जब कि

$x = h + r\cos\theta$ और $y = k + r\sin\theta, 0 \leqslant \theta < 2\pi$

अतः, वृत्त $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ के प्रत्येक बिन्दु P को

$$x = h + r\cos\theta, \text{ और } y = k + r\sin\theta$$

से निरूपित किया जा सकता है। विलोमतः, यदि किसी बिन्दु P के निर्देशांक $(h + r\cos\theta, k + r\sin\theta)$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$ हैं, तब यह वृत्त पर होगा यदि

$$(h + r\cos\theta - h)^2 + (k + r\sin\theta - k)^2 = r^2$$

अर्थात्, यदि $r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2$

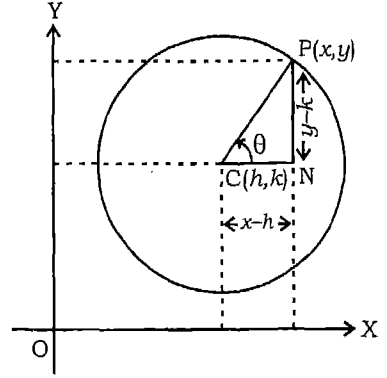
जो कि सभी $\theta, 0 \leqslant \theta < 2\pi$, के लिए सत्य है।

इस प्रकार, $x = h + r\cos\theta, y = k + r\sin\theta, (0 \leqslant \theta < 2\pi)$

समीकरण $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ द्वारा निरूपित वृत्त के समीकरण का प्राचल रूप है।

उदाहरण 7 दिखाइए कि बिन्दु (x, y), जो इस प्रकार है

$$x = \frac{2at}{1+t^2}, \ y = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2} \ (a \text{ एक वास्तविक संख्या है})$$

t के सभी वास्तविक मानों के लिए वृत्त पर स्थित है। यह भी वृत्त के प्राचल समीकरण हैं।

हल हमें ज्ञात है कि

$$x=\frac{2at}{1+t^2},\ y=\frac{a(1-t^2)}{1+t^2}$$

वर्ग करके और जोड़ने पर, हमें समीकरण

$$x^2+y^2=a^2$$

प्राप्त होता है, जो एक वृत्त को निरूपित करता है।

उदाहरण 8 वृत्त के समीकरण $x^2+y^2=9$ का प्राचल रूप बताइए।

हल वृत्त का दिया समीकरण $x^2+y^2=9$ है।

यहाँ $r=3$, अतः दिये वृत्त के प्राचल θ के पद में प्राचल समीकरण हैं

$$x=3\cos\theta,\ y=3\sin\theta,\ 0\leqslant\theta<2\pi$$

उदाहरण 9 $x=5+3\cos\theta,\ y=7+3\sin\theta,\ 0\leqslant\theta<2\pi$ से निरूपित वक्र का कार्त्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल कार्त्तीय समीकरण से अभिप्राय उस समीकरण से है जो प्राचल θ के बिना x, y से सम्बद्ध हो। इसलिए, हमें दिये प्राचल समीकरणों से θ का विलोपन करना चाहिए।

दिये समीकरण को इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$\cos\theta=\frac{x-5}{3} \text{ और } \sin\theta=\frac{y-7}{3}$$

वर्ग करके जोड़ने पर, हम पाते हैं

$$\left[\frac{x-5}{3}\right]^2+\left[\frac{y-7}{3}\right]^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

या $$(x-5)^2+(y-7)^2=9$$

जो कि अभीष्ट कार्त्तीय समीकरण है।

उदाहरण 10 वृत्त $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ का प्राचल समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल वृत्त $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ के प्राचल समीकरण हैं:

$$x=h+r\cos\theta,\ y=k+r\sin\theta,\ 0\leqslant\theta<2\pi$$

दिये वृत्त का समीकरण है

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

जिसे इस प्रकार लिखा जा सकता है,

$$(x-1)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$$

इसकी तुलना $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ से करने पर हम पाते हैं,

$$h = 1, k = -2, \text{ और } r = 3$$

इसलिए, दिये वृत्त का प्राचल समीकरण

$$x = 1 + 3 \cos \theta, y = -2 + 3 \sin \theta, 0 \leqslant \theta < 2\pi$$

हैं।

प्रश्नावली 12.3

1. दिखाइए कि बिन्दु (x, y), जहाँ

$$x = 5 \cos \theta, y = -3 + 5 \sin \theta$$

θ के सभी मानों के लिए वृत्त पर स्थित है।

2. दिखाइए कि बिन्दु (x, y), जहाँ

$$x = a + r \cos \theta, y = \mathrm{b} + r \sin \theta$$

θ के सभी मानों के लिए वृत्त पर स्थित है।

निम्नलिखित वृत्तों (प्रश्न 3 से 5 तक) के प्राचल समीकरण ज्ञात कीजिए:

3. $3x^2 + 3y^2 = 4$

4. $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 1 = 0$

5. $x^2 + y^2 + px + py = 0$

निम्नलिखित प्रश्नों 6 से 8 तक प्रत्येक में वक्रों के कार्त्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए। जब कभी वक्र वृत्त हो तो इसका केन्द्र तथा त्रिज्या भी ज्ञात कीजिए।

6. $x = 3 \cos \alpha, y = 3 \sin \alpha$

7. $x = a + c \cos \alpha, y = \mathrm{b} + c \sin \alpha$

8. $x = 7 + 4 \cos \alpha, y = -3 + 4 \sin \alpha$

निम्नलिखित प्रश्नों 9 से 10 तक प्रत्येक में वृत्तों के प्राचल समीकरण ज्ञात कीजिए :

9. $3x^2 + 3y^2 + 4x - 6y - 4 = 0$

10. $2x^2 + 2y^2 - 5x - 7y - 3 = 0$

12.5 वृत्त का समीकरण जब कि व्यास के अन्त्य बिन्दु ज्ञात हों

मान लीजिए वृत्त के व्यास QR के अन्त्य बिन्दुओं Q और R के निर्देशांक क्रमशः (x_1, y_1) और (x_2, y_2) हैं।

मान लीजिए वृत्त (आकृति 12.4) पर कोई बिन्दु P (x, y) है। मान लीजिए अर्द्धवृत्त में $\angle$ QPR है। तब

$$\angle QPR = 90°$$

इसलिए, QP और RP के प्रवणताओं का गुणनफल –1 है।

आकृति 12.4

अब QP की प्रवणता $\dfrac{y-y_1}{x-x_1}$ है,

और RP की प्रवणता $\dfrac{y-y_2}{x-x_2}$ है, जहाँ $x \neq x_1, x_2$

इसलिए, $$\frac{y-y_1}{x-x_1} \times \frac{y-y_2}{x-x_2} = -1$$

या $$(y - y_1)(y - y_2) = -(x - x_1)(x - x_2)$$

अतः, वृत्त का अभीष्ट समीकरण

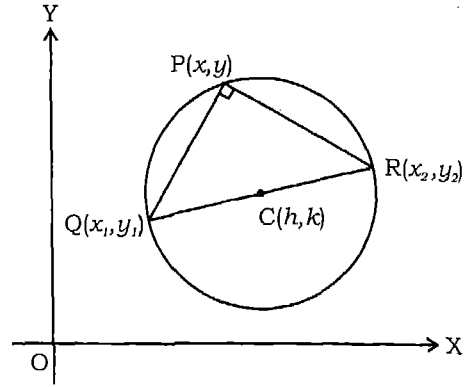
$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0 \qquad (1)$$

है।

उदाहरण 11 वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जबकि व्यास के अन्त्य बिन्दुओं के निर्देशांक (3, 4) और (–3, – 4) हैं।

हल दिया है $x_1 = 3, y_1 = 4; x_2 = -3, y_2 = -4$

समीकरण (1) में इन मानों को प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैं,

$$(x-3)(x + 3) + (y-4)(y + 4) = 0$$

या $\quad x^2 - 9 + y^2 - 16 = 0$

या $\quad x^2 + y^2 = 25$

जो वृत्त का अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 12 वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जब कि व्यास के सिरे (–2, –3) और (–3, 5) है।

हल यहाँ $x_1 = -2, y_1 = -3; x_2 = -3, y_2 = 5$

इसलिए, वृत्त का समीकरण

$$(x + 2)(x + 3) + (y + 3)(y - 5) = 0$$

या $\quad x^2 + 5x + 6 + y^2 - 2y - 15 = 0$

या $\quad x^2 + y^2 + 5x - 2y - 9 = 0$ है।

उदाहरण 13 उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो उस आयत के विकर्ण को व्यास मान कर खींचा गया है जिसकी भुजाएं में $x = 4, x = -2; y = 5$ और $y = -2$ हैं।

हल दी गई भुजाओं के समीकरण हैं

(i) $x = 4$ (ii) $x = -2$

(iii) $y = 5$ (iv) $y = -2$

(i) और (iii) का प्रतिच्छेद बिन्दु A (4, 5) है। जो कि व्यास का एक अन्त्य बिन्दु है; और (ii) और (iv) का प्रतिच्छेद बिन्दु C (–2, –2) है जो कि व्यास का दूसरा अन्त्य बिन्दु है (आकृति 12.5)। इसलिए, वृत्त का समीकरण

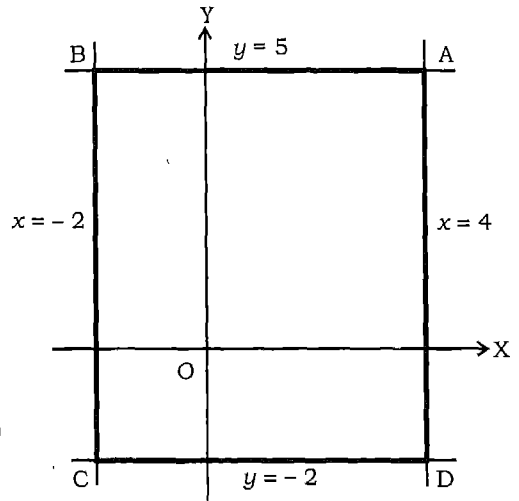
$$(x - 4)(x + 2) + (y - 5)(y + 2) = 0$$

या $\quad x^2 - 2x - 8 + y^2 - 3y - 10 = 0$

या $\quad x^2 + y^2 - 2x - 3y - 18 = 0 \qquad (1)$

है।

आकृति 12.5

चूँकि $\angle ABC = 90° = \angle ADC$, अतः (1) द्वारा दिया वृत्त B और D से भी हो कर जाएगा। इस प्रकार, यह BD व्यास वाला भी वृत्त है।

प्रश्नावली 12.4

प्रश्न 1 से 5 तक प्रत्येक में वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके व्यास के अन्त्य बिन्दु हैं

1. (2, 3) और (–1, –3)

2. (–2, 3) और (3, –5)

3. (3, 2) और (2, 5)

4. (5, –3) और (2, –4)

5. (p, q) और (r, s)

वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो उस आयत के विकर्ण को व्यास मान कर खींचा गया है जिसकी भुजाएँ नीचे दी गई हैं

6. $x = 6$, $x = -3$; $y = 3$ और $y = -1$

7. $x = 5$, $x = 8$; $y = 4$ और $y = 7$

8. $x = 4$, $x = -5$; $y = 5$ और $y = -3$

12.6 एक रेखा और एक वृत्त का प्रतिच्छेदन, स्पर्शी होने का प्रतिबन्ध

12.6.1 वृत्त $x^2 + y^2 = r^2$ (1)

और रेखा $y = mx + c$ (2)

पर विचार कीजिए।

वृत्त (1) और रेखा (2) का प्रतिच्छेदन बिन्दु ज्ञात करने के लिए, हमें दोनों समीकरणों को हल करना है।

y का मान समीकरण (2) से (1) में प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैं

$$x^2 + (mx + c)^2 = r^2$$

या $$x^2 + m^2x^2 + 2mcx + c^2 = r^2$$

या $$(1 + m^2)\, x^2 + 2mcx + c^2 - r^2 = 0 \quad (3)$$

उपर्युक्त समीकरण वास्तविक गुणांकों का x में द्विघातीय समीकरण है, इससे हमें x के दो मान प्राप्त होंगे जो वास्तविक और भिन्न-भिन्न, संपाती या काल्पनिक होंगे यदि इसका विविक्तकर क्रमशः धनात्मक, शून्य या ऋणात्मक है।

अर्थात् $4m^2c^2 - 4(1+m^2)(c^2 - r^2) > 0$

या $4m^2c^2 - 4(1+m^2)(c^2 - r^2) = 0$

या $4m^2c^2 - 4(1+m^2)(c^2 - r^2) < 0$

अर्थात् $4r^2(1+m^2) > 4c^2$

या $4r^2(1+m^2) = 4c^2$

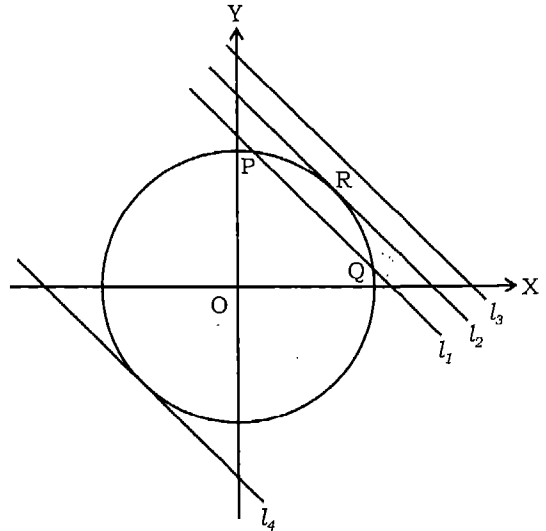
या $4r^2(1+m^2) < 4c^2$

अर्थात् $$r > \left|\frac{c}{\sqrt{1+m^2}}\right| \quad (4)$$

या $$r = \left|\frac{c}{\sqrt{1+m^2}}\right| \quad (5)$$

या $$r < \left|\frac{c}{\sqrt{1+m^2}}\right| \quad (6)$$

अतः, (4), (5) अथवा (6) के सत्य होने के अनुसार एक रेखा वृत्त को क्रमशः दो विभिन्न बिन्दुओं पर या दो संपाती बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करेगी अथवा किसी भी बिन्दु पर प्रतिच्छेद नहीं करेगी।

आकृति 12.6 में l_1, l_2 और l_3 चिन्हित सभी रेखाएँ समान्तर हैं अर्थात् सभी की प्रवणता एक समान "m" है। सरल रेखा l_1 जो (4) को संतुष्ट करने वाले r के मान के संगत है और यह वृत्त को दो वास्तविक बिन्दुओं मान लीजिए P और Q पर काटेगी। सरल रेखा l_2 जो (5) को संतुष्ट करने वाले r के मान के संगत है, और वृत्त को दो संपाती बिन्दुओं, मान लीजिए R, पर स्पर्श करेगी। सरल रेखा l_3 जो (6) को संतुष्ट करने वाले r के मान के संगत है, यह वृत्त को कभी नहीं काटेगी।

आकृति 12.6

12.6.2 *स्पर्शी होने का प्रतिबन्ध*

परिभाषा एक रेखा, जो वृत्त को दो संपाती बिन्दुओं में मिलती है, वृत्त की ***स्पर्शी*** कहलाती है। वृत्त पर स्थित बिन्दु स्पर्शी का ***स्पर्श बिन्दु*** कहलाता है।

सरल रेखा $y = mx + c$, वृत्त (1) की स्पर्शी होगी यदि

$$r = \left|\frac{c}{\sqrt{1+m^2}}\right| \tag{7}$$

अर्थात्, यदि $$c = \pm r\sqrt{1+m^2} \tag{8}$$

सम्बन्ध (8) को रेखा (2) के वृत्त (1) की स्पर्शी होने का प्रतिबन्ध कहते हैं।

इसका अर्थ है m के प्रत्येक मान के लिए, रेखायें

$$y = m\,x + r\sqrt{1+m^2} \text{ और } y = m\,x - r\sqrt{1+m^2}$$

वृत्त $x^2 + y^2 = r^2$ की स्पर्शियां हैं। आकृति 12.6 में वे l_2 और l_4 से चिन्हित हैं।

यह वृत्त की समान्तर स्पर्शियों का युग्म है (दोनों की प्रवणता एक समान हैं)। ये वृत्त को जिन बिन्दुओं पर स्पर्श करती हैं वे m पर निर्भर हैं।

उदाहरण 14 रेखा $y = 1 + x$ और वृत्त $x^2 + y^2 = 25$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 = 25$ और रेखा का समीकरण $y = 1 + x$ है।

y के इस मान को वृत्त के समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैं

$$x^2 + (x + 1)^2 = 25$$

या $$x^2 + x - 12 = 0$$

या $$(x - 3)\,(x + 4) = 0$$

जिससे प्राप्त होता है

$$x = 3 \text{ या } -4$$

इन मानों को समीकरण $y = 1 + x$ में रखने पर, हम y के संगत मान 4 या -3 पाते हैं। इसलिए, प्रतिच्छेद बिन्दु (3, 4) और (–4, –3) हैं।

उदाहरण 15 दिखाइए कि रेखा $x + y = 5$, वृत्त $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ को स्पर्श करती है। स्पर्श बिन्दु भी ज्ञात कीजिए।

हल वृत्त का समीकरण

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0 \qquad (1)$$

और रेखा का समीकरण

$$x + y = 5 \qquad (2)$$

है।

हम जानते हैं कि एक रेखा एक वृत्त को स्पर्श करती है यदि यह वृत्त को दो संपाती बिन्दुओं में काटती है। इसलिए, हम उनके प्रतिच्छेद बिन्दुओं के लिए दोनों समीकरणों को हल करते हैं। y का मान (2) से (1) में प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैं,

$$x^2 + (5 - x)^2 - 2x - 4(5 - x) + 3 = 0$$

या $\quad x^2 + 25 - 10x + x^2 - 2x - 20 + 4x + 3 = 0$

या $\quad 2x^2 - 8x + 8 = 0$

या $\quad x^2 - 4x + 4 = 0$

या $\quad (x - 2)^2 = 0$

अर्थात् $\quad x = 2, 2.$

अर्थात मूल समान हैं। इस प्रकार, दी हुई रेखा दिए वृत्त को दो संपाती बिन्दुओं पर काटती है। अतः रेखा वृत्त को स्पर्श करती है।

अब, जब $x = 2$, तब (2) से, हम पाते हैं $y = 3$. इसलिए ,स्पर्श बिन्दु $(2, 3)$ है।

उदाहरण 16 p का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए रेखा $3x + 4y - p = 0$, वृत्त $x^2 + y^2 - 64 = 0$ की स्पर्शी हो।

हल हम जानते हैं कि स्पर्शी होने का प्रतिबन्ध $c = \pm r\sqrt{1+m^2}$ है।

दी हुई रेखा $3x + 4y - p = 0$ है।

या $\quad y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{p}{4}$.

इसलिए $\quad m = -\dfrac{3}{4}$ और $c = \dfrac{p}{4}$ तथा वृत्त की त्रिज्या 8 है,

इसलिए $\frac{p}{4} = \pm 8\sqrt{1+(\frac{-3}{4})^2}$

$= \pm 8\sqrt{\frac{25}{16}}$

$= \pm (8 \times \frac{5}{4}) = \pm 10$

अर्थात् $p = \pm 40$

प्रश्नावली 12.5

1. रेखा $x + y = 2$ और वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
2. रेखा $7x - y - 25 = 0$ और वृत्त $x^2 + y^2 = 25$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
3. रेखा $x + 2y - 5 = 0$ और वृत्त $x^2 + y^2 = 25$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए।
4. रेखा $y = mx + c$ और वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए और वह प्रतिबन्ध भी ज्ञात कीजिए जिससे रेखा वृत्त की स्पर्शी हो।
5. सिद्ध कीजिए कि रेखा $y = x + \sqrt{2}\,a$, वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ को स्पर्श करती है तथा स्पर्श बिन्दु भी ज्ञात कीजिए।
6. सिद्ध कीजिए कि रेखा $y = mx + r\sqrt{1+m^2}$, वृत्त $x^2 + y^2 = r^2$ को बिन्दु $\left(-\frac{mr}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{r}{\sqrt{1+m^2}}\right)$ पर स्पर्श करती हैं।
7. c के किन मानों के लिए रेखा $y = 2x + c$, वृत्त $x^2 + y^2 = 5$ की स्पर्शी होगी।

12.7 वृत्त पर स्थित एक बिन्दु पर स्पर्शी का समीकरण और किसी बिन्दु से स्पर्शी की लम्बाई

12.7.1 *वृत्त पर स्थित एक बिन्दु पर स्पर्शी का समीकरण ज्ञात करना*

मान लीजिए, वृत्त का समीकरण

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{1}$$

है और इस पर दिया बिन्दु P (x_1, y_1) है।

चूँकि (x_1, y_1) वृत्त पर स्थित है, हम पाते हैं,

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2 \qquad (2)$$

(x_1, y_1) से जाने वाली और m प्रवणता वाली रेखा का समीकरण

$$y - y_1 = m\,(x - x_1) \qquad (3)$$

या $\quad y = mx + (y_1 - mx_1)$

है। इस रेखा के वृत्त $x^2 + y^2 = r^2$ को स्पर्श करने का प्रतिबन्ध

$$y_1 - mx_1 = \pm\, r\sqrt{1 + m^2}$$

अर्थात् $\quad (y_1 - mx_1)^2 = (1 + m^2)\, r^2$

है। (2) का प्रयोग करके, हम पाते हैं

$$(y_1 - mx_1)^2 = (1 + m^2)\,(x_1^2 + y_1^2)$$

या $\quad x_1^2 + 2x_1Iy_1 + m^2y_1^2 = 0$

या $\quad (my_1 + x_1)^2 = 0$

अर्थात् $\quad my_1 + x_1 = 0$

समीकरण (3) में m का मान रखने पर, हम पाते हैं

$$\left(\frac{y - y_1}{x - x_1}\right)y_1 + x_1 = 0$$

अर्थात् $\quad (y - y_1)\, y_1 + (x - x_1)\, x_1 = 0$

अर्थात् $\quad x\,x_1 + y\,y_1 - x_1^2 - y_1^2 = 0$

अर्थात् $\quad x\,x_1 + y\,y_1 - r^2 = 0$ {(2) के प्रयोग से}

अर्थात् $\quad x\,x_1 + y\,y_1 = r^2 \qquad (4)$

यह दिए गए वृत्त (1) के बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्शी का समीकरण है।

टिप्पणी : वृत्त $x^2 + y^2 = r^2$ के बिन्दु (x_1, y_1) से जाने वाली त्रिज्या की प्रवणता $\frac{y_1}{x_1}$ है और वृत्त के बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्शी की प्रवणता $-\frac{x_1}{y_1}$ {(4) से देखने पर} है। इसलिए, बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्शी, (x_1, y_1) से जाने वाली वृत्त की त्रिज्या के लम्बवत है।

12.7.2 वृत्त $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ (1) के बिन्दु (x_1, y_1) पर वृत्त की स्पर्शी का समीकरण

मान लीजिए वृत्त (आकृति 12.7) के दो सन्निकट बिन्दु P (x_1, y_1) और Q (x_2, y_2) हैं। रेखा PQ का समीकरण

$$(y-y_1) = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \quad (2)$$

है।

आकृति 12.7

चूँकि (x_1, y_1) और (x_2, y_2) वृत्त (1) पर स्थित हैं, हम पाते हैं

$$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0 \quad (3)$$

और $$x_2^2 + y_2^2 + 2gx_2 + 2fy_2 + c = 0 \quad (4)$$

(3) में से (4) को घटाने पर, हम पाते हैं

$$(x_1^2-x_2^2) + (y_1^2-y_2^2) + 2g(x_1-x_2) + 2f(y_1-y_2) = 0$$

या $$(x_1 + x_2)(x_1-x_2) + (y_1 + y_2)(y_1-y_2) + 2g(x_1-x_2) + 2f(y_1-y_2) = 0$$

या $$(y_1-y_2)(y_1 + y_2 + 2f) + (x_1-x_2)(x_1 + x_2 + 2g) = 0$$

या $$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{x_1 + x_2 + 2g}{y_1 + y_2 + 2f}$$

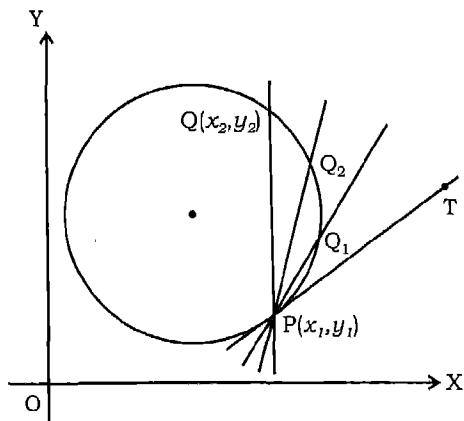
इसलिए, रेखा PQ का समीकरण $y - y_1 = -\frac{x_1 + x_2 + 2g}{y_1 + y_2 + 2f}(x - x_1)$ (5)

यदि रेखा (5) P पर स्पर्शी है, तब वृत्त के अनु x_2, x_1 की ओर और y_2, y_1 की ओर प्रवृत्त होंगे। इसलिए, हम पाते हैं

$$y - y_1 = -\frac{2(x_1+g)}{2(y_1+f)}(x - x_1)$$

या $$(y - y_1)(y_1 + f) = -(x_1 + g)(x - x_1)$$

या $$yy_1 + yf - y_1^2 - fy_1 = -(xx_1 - x_1^2 + gx - gx_1)$$

या $$xx_1 + yy_1 + gx + fy = x_1^2 + y_1^2 + gx_1 + fy_1$$

दोनों पक्षों में $gx_1 + fy_1 + c$ जोड़ने पर, हम पाते हैं

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$$

(3) के परिप्रेक्ष्य में, यह हो जाता है

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0 \quad (6)$$

जो कि स्पर्शी का समीकरण है।

विकल्प विधि

मान लीजिए दिए वृत्त

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad (1)$$

पर दिया बिन्दु $P(x_1, y_1)$ है।

मान लीजिए C वृत्त (1) के केन्द्र $(-g, -f)$ को निरूपित करता है।

तब CP की प्रवणता $= \dfrac{y_1 + f}{x_1 + g}$ (2)

क्योंकि वृत्त (1) की बिन्दु P पर स्पर्शी C P के लम्बवत है,

अतः P पर स्पर्शी की प्रवणता $= -\dfrac{x_1 + g}{y_1 + f}$ (3)

इसलिए वृत्त (1) के बिन्दु P पर अभीष्ट स्पर्शी (3) से प्रदत्त प्रवणता, की रेखा है। इस प्रकार, वृत्त (1) की P पर स्पर्शी का समीकरण

$$y - y_1 = -\frac{x_1 + g}{y_1 + f}(x - x_1)$$

या $\quad (x-x_1)(x_1 + g) + (y-y_1)(y_1 + f) = 0$

या $\quad xx_1 + yy_1 + gx + fy = x_1^2 + y_1^2 + gx_1 + fy_1$

$\quad = -gx_1 - fy_1 - c$, क्योंकि P (1) पर स्थित है।

या $\quad xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$

टिप्पणी

1. यहाँ ध्यान दिया जाना चाहिए कि (x_1, y_1) पर स्पर्शी वृत्त के समीकरण में क्रमशः x^2 के लिए xx_1, y^2 के लिए yy_1, x के लिए $\dfrac{x+x_1}{2}$ और y के लिए $\dfrac{y+y_1}{2}$ प्रतिस्थापित करने से प्राप्त होती है।

2. (12.7.1) के परिणाम विकल्पतः (12.7.2) में प्रयुक्त विधि से व्युत्पन्न किए जा सकते हैं।

उदाहरण 17 वृत्त $x^2 + y^2 = 13$ के बिन्दु (2, 3) पर स्पर्शी का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल वृत्त $x^2 + y^2 = r^2$ की (x_1, y_1) पर स्पर्शी का समीकरण $xx_1 + yy_1 = r^2$ है।

$x_1 = 2, y_1 = 3$ और $r = 13$ प्रतिस्थापित करने पर, दिए वृत्त की अभीष्ट स्पर्शी का समीकरण $2x + 3y = 13$ है।

उदाहरण 18 वृत्त $x^2 + y^2 - 26x + 12y + 105 = 0$ के बिन्दु (7, 2) पर स्पर्शी का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल वृत्त के उपर्युक्त समीकरण की वृत्त के व्यापक समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ से तुलना करने पर हम पाते हैं

$$2g = -26, \qquad 2f = 12, \qquad c = 105$$

तथा, $x_1 = 7, \qquad y_1 = 2$

इसलिए, (6) से, स्पर्शी का समीकरण है

$$7x + 2y - \frac{26}{2}(x + 7) + \frac{12}{2}(y + 2) + 105 = 0$$

या $$7x + 2y - 13(x + 7) + 6(y + 2) + 105 = 0$$

या $$7x + 2y - 13x - 91 + 6y + 12 + 105 = 0$$

या $$-6x + 8y + 26 = 0$$

या $$3x - 4y - 13 = 0$$

उदाहरण 19 वृत्त $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ के उन स्पर्शियों के समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $4x + 3y + 5 = 0$ के समान्तर है।

हल दिया वृत्त $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ (1)

है जिसे निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 5^2 \qquad (2)$$

दी हुई रेखा $4x + 3y + 5 = 0$ (3)

है। दी हुई रेखा (3) के समान्तर किसी सरल रेखा का समीकरण

$$4x + 3y + K = 0 \qquad (4)$$

है। यह (1) की स्पर्शी होगी, यदि इसकी केन्द्र (3, –2) से दूरी त्रिज्या 5 के बराबर हो। स्मरण कीजिए कि बिन्दु (x_1, y_1) से रेखा $Ax + By + C = 0$ की दूरी का सूत्र

$$\left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| \text{ है।}$$

इसलिए $$\left|\frac{4\times3+3.(-2)+K}{\sqrt{4^2+3^2}}\right| = \left|\frac{12-6+K}{\sqrt{4^2+3^2}}\right| = 5$$

या $$K+6=25$$

या $$K+6=\pm 25$$

या $$K = 19 \text{ या } -31$$

अतः अभीष्ट स्पर्शियाँ $4x + 3y + 19 = 0$ तथा $4x + 3y - 31 = 0$ हैं।

12.7.3 *एक बिन्दु से खींची गयी स्पर्शी की लम्बाई*

मान लीजिए दिया बिन्दु A (x_1, y_1) है (आकृति 12.8) और मान लीजिए कि दिए वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 = r^2$ है। तथा AT स्पर्शी और OT त्रिज्या है।

आकृति 12.8

तब, $$\angle OTA = \frac{\pi}{2}$$

पाइथागोरस प्रमेय के अनुप्रयोग से, हम पाते हैं

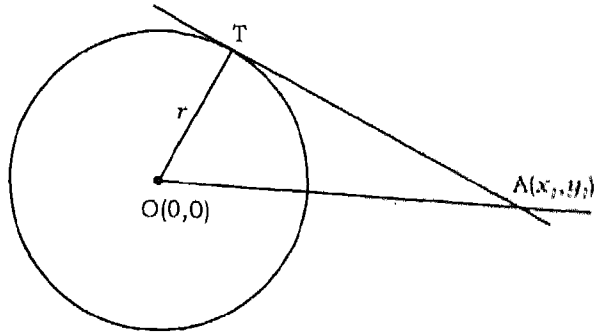
$$AT^2 = OA^2 - r^2$$

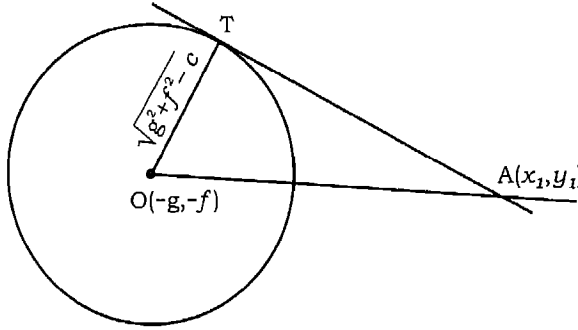
या $$AT^2 = (x_1-0)^2 + (y_1-0)^2 - r^2$$

$$= x_1^2 + y_1^2 - r^2$$

इसलिए, $$AT = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 - r^2}$$

जो बिन्दु A (x_1, y_1) से खींची अभीष्ट स्पर्शी की लम्बाई है।

बिन्दु (x_1, y_1) से व्यापक समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ द्वारा निरूपित वृत्त पर खींची स्पर्शी की लम्बाई ज्ञात करना हम उपर्युक्त स्थिति में प्रयुक्त विधि के अनुसार ही ज्ञात कर सकते हैं।

वृत्त (आकृति 12.9) का केन्द्र $(-g, -f)$ और त्रिज्या

$$r = \sqrt{g^2 + f^2 - c} \text{ है।}$$

आकृति 12.9

पुनः पाइथागोरस प्रमेय के अनुप्रयोग से, हम पाते हैं

$$\begin{aligned} AT^2 &= (x_1 + g)^2 + (y_1 + f)^2 - (g^2 + f^2 - c) \\ &= x_1^2 + 2gx_1 + g^2 + y_1^2 + 2fy_1 + f^2 - (g^2 + f^2 - c) \\ &= x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c \end{aligned}$$

अतः, स्पर्शी AT की लम्बाई $\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$ है।

उदाहरण 20 बिन्दु (4, 3) से वृत्त $x^2 + y^2 = 9$ पर खींची स्पर्शी की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल बिन्दु (x_1, y_1) से वृत्त $x^2 + y^2 = r^2$ पर खींची स्पर्शी की लम्बाई $\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - r^2}$ है।

यहाँ $\quad x_1 = 4, \quad y_1 = 3, \quad r^2 = 9$

इसलिए, स्पर्शी की लम्बाई $= \sqrt{16 + 9 - 9} = 4$ है।

उदाहरण 21 (3, 4) से वृत्त $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$ पर खींची स्पर्शी की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल बिन्दु (x_1, y_1) से वृत्त $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ पर खींची स्पर्शी की लम्बाई

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c} \text{ है।}$$

यहाँ, $\quad x_1 = 3, \quad y_1 = 4, \quad 2g = -4, \quad 2f = 6, \quad c = -1,$

इन मानों को प्रतिस्थापित करने पर,

स्पर्शी की लम्बाई = $\sqrt{3^2+4^2-4\times3+6\times4-1}$

$= \sqrt{36} = 6$

अतः, अभीष्ट स्पर्शी की लम्बाई 6 है।

प्रश्नावली 12.6

प्रश्न 1 से 7 तक के वृत्तों में इंगित बिन्दुओं पर स्पर्शी का समीकरण ज्ञात कीजिए।

1. $x^2 + y^2 = 2;$ $(1, 1)$

2. $x^2 + y^2 = 10;$ $(1, -3)$

3. $x^2 + y^2 = 25;$ $(-3, -4)$

4. $x^2 + y^2 - 30x + 6y + 109 = 0;$ $(4, -1)$

5. $x^2 + y^2 - 26x - 2y + 45 = 0;$ $(2, 3)$

6. $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 1 = 0;$ $(-3, 2)$

7. $x^2 + y^2 - 2ax = 0;$ $[a(1 + \cos\alpha), a\sin\alpha]$

प्रश्न 8 से 13 तक प्रत्येक वृत्त पर इंगित बिन्दुओं से खींची स्पर्शी की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

8. $x^2 + y^2 = 3;$ $(2, 1)$

9. $x^2 + y^2 = 12;$ $(5, 6)$

10. $x^2 + y^2 = 8;$ $(3, 2)$

11. $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 16 = 0;$ $(2, 4)$

12. $x^2 + y^2 + x + 2y + 6 = 0;$ $(-1, -3)$

13. $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 4 = 0;$ $(2, 3)$

14. वृत्त $x^2 + y^2 = 9$ की उन स्पर्शियों के समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $2x + y - 3 = 0$ के समान्तर हैं।

15. वृत्त $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0$ की उन स्पर्शियों के समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $5x + 12y + 6 = 0$ के समान्तर हैं।

16. दिखाइए कि बिन्दु α के सभी मानों के लिए $(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$ वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ पर स्थित है तथा यह भी दिखाइए कि इस बिन्दु पर स्पर्शी का समीकरण $x\cos\alpha + y\sin\alpha = a$ है।

17. प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए ताकि रेखा $lx + my = n$, वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ की स्पर्शी हो।

विविध उदाहरण

उदाहरण 22 बिन्दुओं (0, –1) और (2, 0) से जाने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र रेखा $3x + y = 5$ पर स्थित है।

हल मान लीजिए कि वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ है।

यह बिन्दुओं (0, –1) और (2, 0) से जाता है। इसलिए, हम पाते हैं

$$1 - 2f + c = 0 \quad \text{या} \quad 2f - c = 1 \qquad (1)$$

और $$4f + 4g + c = 0 \quad \text{या} \quad 4g + c = -4 \qquad (2)$$

तथा वृत्त का केन्द्र $(-g, -f)$, रेखा $3x + y = 5$ पर स्थित है

इसलिए, $$-3g - f = 5 \qquad (3)$$

समीकरण (1) और (2) को जोड़ने पर, हम पाते हैं

$$2f + 4g = -3 \qquad (4)$$

समीकरण (3) और (4) को हल करने पर, हम पाते हैं

$$g = -\frac{7}{2}, \text{ और } f = \frac{11}{2}$$

f का मान (1) में प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैं

$$c = 10$$

इसलिए, वृत्त का समीकरण

$$x^2 + y^2 + 2\left(-\frac{7}{2}\right)x + 2\left(\frac{11}{2}\right)y + 10 = 0$$

अर्थात् $x^2 + y^2 - 7x + 11y + 10 = 0$ है।

उदाहरण 23 वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो y-अक्ष को मूलबिन्दु से 4 की दूरी पर स्पर्श करता है और x-अक्ष पर 6 लम्बाई का अन्तःखण्ड काटता है।

हल मान लीजिए कि वृत्त का समीकरण

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \qquad (1)$$

है। यह y-अक्ष को

$$y^2 + 2fy + c = 0 \qquad (2)$$

से प्राप्त बिन्दुओं पर मिलता है। यह y में द्विघातीय समीकरण है, इसके मूल बराबर होने चाहिए और प्रत्येक या तो 4 या -4 के बराबर होगा। इसलिए, यह

$$(y \pm 4)^2 = 0$$

या $$y^2 \pm 8y + 16 = 0 \qquad (3)$$

के तुल्य होनी चाहिए। (2) और (3) की तुलना करने पर, हम पाते हैं

$$2f = \pm 8 \text{ और } c = 16$$

इसलिए, वृत्त के समीकरण निम्नलिखित होगें

$$x^2 + y^2 + 2gx \pm 8y + 16 = 0$$

यह x-अक्ष को समीकरण

$$x^2 + 2gx + 16 = 0$$

से प्राप्त बिन्दुओं पर मिलेगा, अर्थात् वे बिन्दु $-g + \sqrt{g^2-16}$ और $-g - \sqrt{g^2-16}$ होंगे। क्योंकि वृत्त x–अक्ष से लम्बाई 6 का अन्तःखण्ड काटता है, हम पाते हैं

$$6 = 2\sqrt{g^2-16}$$

जिससे $g = \pm 5$ प्राप्त होता है।

अतः वृत्त के अभीष्ट समीकरण

$$x^2 + y^2 \pm 10x \pm 8y + 16 = 0$$

होंगे। इस प्रकार, दिए प्रतिबन्धों को संतुष्ट करने वाले चार वृत्त हैं।

उदाहरण 24 उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो वृत्त $2x^2 + 2y^2 - 6x + 8y + 1 = 0$ के संकेन्द्रीय है और क्षेत्रफल में इससे दोगुना है।

हल दिए वृत्त का समीकरण

$$2x^2 + 2y^2 - 6x + 8y + 1 = 0 \text{ है}$$

जिसे इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$x^2 + y^2 - 3x + 4y + \frac{1}{2} = 0$$

इस वृत्त का केन्द्र $(\frac{3}{2}, -2)$ है और त्रिज्या

$$r = \sqrt{\frac{9}{4} + 4 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{23}{4}}$$ हैं।

हमें दिया गया है कि अभीष्ट वृत्त दिये वृत्त के संकेन्द्रीय है,

इसलिए, इसका केन्द्र $(\frac{3}{2}, -2)$ है।

मान लीजिए अभीष्ट वृत्त की त्रिज्या r_1 है।

दिए प्रतिबन्ध के अनुसार, हम पाते हैं

$$\pi r_1^2 = 2 \times \text{दिए वृत्त का क्षेत्रफल}$$

$$= 2\pi \left(\sqrt{\frac{23}{4}}\right)^2$$

या $$r_1^2 = \frac{23}{2}$$

इसलिए, अभीष्ट वृत्त का समीकरण

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y + 2)^2 = \frac{23}{2}$$

या $$x^2 - 3x + \frac{9}{4} + y^2 + 4y + 4 = \frac{23}{2}$$

या $$x^2 + y^2 - 3x + 4y - \frac{21}{4} = 0$$

या $$4x^2 + 4y^2 - 12x + 16y - 21 = 0$$ है।

उदाहरण 25 उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी वृत्त के बिन्दु (2, 5) पर स्पर्शी रेखा $2x - y + 1 = 0$, है और केन्द्र, रेखा $x + y = 9$ पर स्थित है।

हल रेखा $2x - y + 1 = 0$ पर लम्ब तथा बिन्दु (2, 5) से होकर जाने वाली और रेखा का समीकरण निम्न है।

$$y - 5 = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

या $$x + 2y = 12$$

यह वृत्त के केन्द्र से हो कर जाती है। इसलिए, समीकरणों

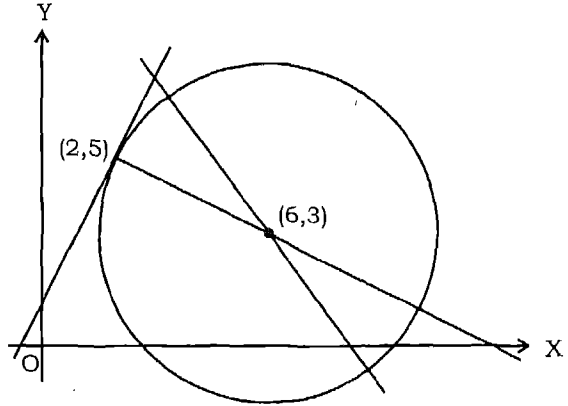
$$x + y = 9 \text{ और } x + 2y = 12$$

के हल करने से केन्द्र के निर्देशांक प्राप्त होंगे।

हल $x = 6, y = 3$ है।

इसलिए केन्द्र (6, 3) हुआ। इस बिन्दु की (2, 5) से दूरी

$$= \sqrt{(6-2)^2+(3-5)^2}$$

$$= \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

जो कि वृत्त की त्रिज्या है।

आकृति 12.10

अतः $(x-6)^2 + (y-3)^2 = 20$, अभीष्ट वृत्त का समीकरण है।

उदाहरण 26 उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 5 है और जो वृत्त $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ को बाह्यतः बिन्दु (5, 5) पर स्पर्श करता है।

हल दिए वृत्त का समीकरण

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0 \text{ है।}$$

इसका केन्द्र A (1, 2) और त्रिज्या $r = 5$ है। मान लीजिए P (5, 5) स्पर्श बिन्दु है। मान लीजिए त्रिज्या 5 के अभीष्ट वृत्त का केन्द्र B (h, k) है, तब P, AB का मध्य बिन्दु है।

इसलिए,

$$5 = \frac{h+1}{2} \text{ और } 5 = \frac{k+2}{2}$$

या $\quad h = 9, \quad k = 8$

अतः अभीष्ट वृत्त

$$(x-9)^2 + (y-8)^2 = 5^2$$

या $\quad x^2 + y^2 - 18x - 16y - 120 = 0$ है।

अभ्यास 12 पर विविध प्रश्नावली

1. बिन्दुओं (2, –3) और (3, –2) से हो कर जाने वाले उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र रेखा $2x - 3y = 8$ पर स्थित है।

2. वृत्त $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 6 = 0$ के संकेन्द्रीय उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या दिए हुए वृत्त की त्रिज्या की दोगुनी है।

3. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो x–अक्ष को मूलबिन्दु से 3 की दूरी पर स्पर्श करता है और y–अक्ष पर लम्बाई 6 का अन्तःखण्ड काटता है।

4. सरल रेखाओं $x - y = 0, 3x + 2y = 5, x - y = 10$ और $2x + 3y = 0$ से बने चतुर्भुज के परिगत वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

5. रेखाओं $x + y = 6, 2x + y = 4$ और $x + 2y = 5$ से बने त्रिभुज के परिगत वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

6. वृत्त $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ के संकेन्द्रीय उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो क्षेत्रफल में इससे दोगुना है।

7. सिद्ध कीजिए कि वृत्तों $x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$ और $x^2 + y^2 - 4x - 12y - 9 = 0$ की त्रिज्याएँ स० श्रे० में हैं।

8. सिद्ध कीजिए कि तीन वृत्तों

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 14 = 0,$$

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y - 5 = 0,$$

और $\quad x^2 + y^2 - 10x - 16y + 7 = 0$

के केन्द्र समरेखीय हैं।

9. बिन्दु $(2, 7)$ पर एक वृत्त की स्पर्शी रेखा $5x - y = 3$ है तथा वृत्त का केन्द्र रेखा $x + 2y = 19$ पर है। वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

10. एक वृत्त के बिन्दु $(-3, 0)$ पर स्पर्शी $4x - 3y = -12$ है और बिन्दु $(4, 1)$ पर स्पर्शी $3x + 4y = 16$ है। वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

11. सिद्ध कीजिए कि वृत्त $x^2 + y^2 = 169$ के बिन्दुओं $(5, 12)$ और $(12, -5)$ पर स्पर्शियाँ परस्पर लम्ब है।

12. $x^2 + y^2 = 3$ की दो स्पर्शियों के समीकरण ज्ञात कीजिए जो x–अक्ष से $60°$ का कोण बनाती हैं।

13. दिखाइए कि रेखा $x + \sqrt{3}\, y = 4$ वृत्तों $x^2 + y^2 = 4$ और $x^2 + y^2 - 4x - 4\sqrt{3}\, y + 12 = 0$ को एक ही बिन्दु पर स्पर्श करती हैं।

14. यदि रेखाएँ $5x + 12y - 10 = 0$ और $5x - 12y - 40 = 0$ व्यास 6 के वृत्त C_1 को स्पर्श करें और यदि C_1 का केन्द्र प्रथम चर्तुथांश में स्थित हो तो वृत्त C_2 का समीकरण ज्ञात कीजिए जो C_1 के संकेन्द्रीय है और इन रेखाओं पर लम्बाई 8 का अन्तःखण्ड काटता है।

15. यदि मूलबिन्दु की तीन वृत्तों $x^2 + y^2 - 2\lambda x = c^2$, जहाँ c अचर और λ चर है, के केन्द्रों से दूरियाँ गु० श्रे० में हों तो सिद्ध कीजिए कि वृत्त $x^2 + y^2 = c^2$ के किसी बिन्दु से इन तीनों पर खींची स्पर्शियों की लम्बाइयाँ गु० श्रे० में हैं।

शंकु परिच्छेद (CONIC SECTIONS)

अध्याय 13

13.1 भूमिका

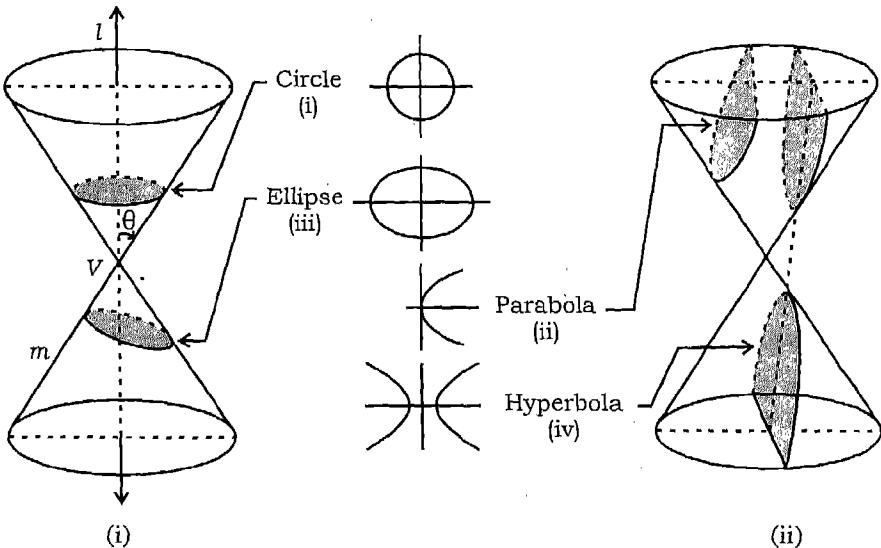
पिछले अध्याय में, हमने वृत्त के समीकरणों के विभिन्न रूपों का अध्ययन किया है। इस अध्याय में, हम कुछ अन्य वक्रों का अध्ययन करेंगे जो सामान्यत: शांकव के रूप में जाने जाते हैं, और उनके संगत समीकरणों को व्युत्पन्न करेंगे। एक शंकु परिच्छेद तल में एक वक्र है जो एक लम्बवृत्तीय द्विशंकु और एक तल के प्रतिच्छेदन से प्राप्त किया जा सकता है। इसी कारण से इन्हें शंकुपरिच्छेद या शांकव कहा जाता है। हम मुख्यत: तीन प्रकार के शंकु परिच्छेद–नामत: परवलय (parabola), दीर्घवृत्त (ellipse) और अतिपरवलय (hyperbola) का अध्ययन करेंगे। इन वक्रों के गुणधर्मो और उनकी आकृतियों ने उन्हें प्रायोगिक रूप से बहुत अधिक उपयोगी बना दिया है।

जब लगभग 1604 ई० में गैलीलियो ने खोजा कि मीनार की चोटी से क्षैतिजत: एक प्रक्षेप्य फेंका जाय तो इसका पथ एक परवलय होता है तब शांकव का प्रथम अनुप्रयोग हुआ। आटोमोबाइल्स की हैडलाइट में परावर्तक, रेडियो के लाउड़स्पीकर और दूरदर्शी (Telescope) के दर्पण परवलय आकार के होते हैं। परवलीय दर्पणों को कभी–कभी सौर ऊर्जा एकत्र करने में प्रयोग करते हैं। केवल कुछ वर्षों बाद, 1609 ई० में केप्लर ने सर्वप्रथम घोषित किया कि हमारे सौर मण्डल के ग्रह सूर्य के चारों ओर दीर्घवृत्तीय कक्षाओं में परिक्रमा करते हैं। अनेक कलाकृतियों और पुलों के निर्माण में दीर्घवृत्त प्रयुक्त होता है। दीर्घवृत्त के ज्ञान से आज सूर्य ग्रहण और चन्द्र ग्रहण के सही स्थान और समय की भविष्यवाणी करना सम्भव हो सका है। घूमती हुई खराद मशीन के कार्य में अतिपरवलय प्रगट होता है। परमाणु के केन्द्रक के विद्युत क्षेत्र में अल्फा कणों द्वारा अंकित पथ के वर्णन में अतिपरवलय भी उपयोगी है। इसके अतिरिक्त सौर मण्डल के उपग्रहों के यात्रा पथ दीर्घवृत्त, परवलय और अतिपरवलय होते हैं।

इस अध्याय में, हम उनके समीकरणों एवं अन्य अनुप्रयोगों को ज्ञात करने में वैश्लेषिक विधियों का प्रयोग करेंगें।

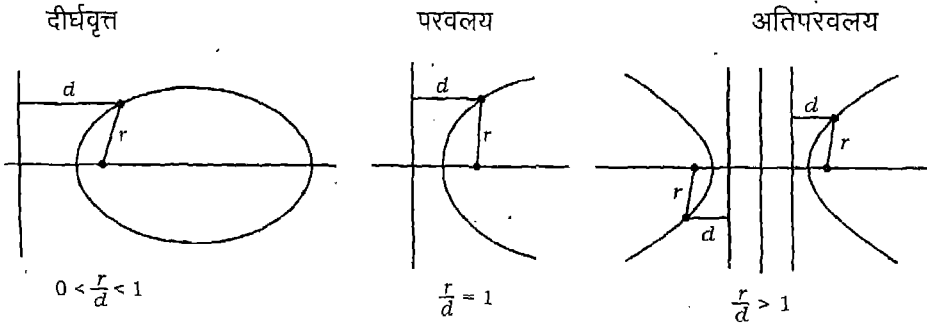
13.2 शंकु के परिच्छेद

मान लीजिए l एक स्थिर ऊर्ध्वाधर रेखा है और m एक दूसरी रेखा है जो इस रेखा को स्थिर बिन्दु V पर प्रतिच्छेद करती है और इससे एक कोण θ बनाती है (आकृति 13.1)। मान लीजिए, हम रेखा m को रेखा l के परितः इस प्रकार घुमाते हैं कि m की सभी स्थितियों में, कोण θ अचर रहे। तब उत्पन्न पृष्ठ एक लम्ब वृत्तीय द्विशंकु है। स्थिर बिन्दु V **शीर्ष** (Vertex) है, और स्थिर रेखा l शंकु की अक्ष है, इन सभी स्थितियों में रेखा m शंकु की **जनक** (generator) कहलाती है। शंकु को शीर्ष दो भागों में विभक्त करता है जिन्हें **नेप्स** (Nappes) कहते हैं।

यदि हम एक तल लेते हैं, तब तल एवं शंकु के उभयनिष्ठ बिन्दु तल द्वारा शंकु के परिच्छेद बनाते हैं। हम तल की स्थितियों के अनुसार विभिन्न प्रकार के शंकु–परिच्छेद प्राप्त करते हैं। यदि तल, शंकु की अक्ष के लम्बवत् होता है, तब शंकु का परिच्छेद एक वृत्त होता है [आकृति 13.1(i)]। यदि तल जनक (generator) के समान्तर है परन्तु स्वयं जनक तल में नहीं हो तब वह दोनों नेप्स (Nappes) को प्रतिच्छेद नहीं करता है, प्रतिच्छेद वक्र परवलय (parabola) होता है [आकृति 13.1(ii)]। यदि तल शंकु की एक नेप (Nappe) के आर–पार पूर्णतः काटता है और अक्ष के लम्बवत् नहीं है, तब प्रतिच्छेदन का वक्र दीर्घवृत्त (ellipse) होता है [आकृति 13.1(iii)]। यदि तल अक्ष के समान्तर है और अक्ष से नहीं जाता है, तब यह दोनों नेप्स (Nappes) को काटता है, प्रतिच्छेदन का वक्र अतिपरवलय (hyperbola) होता है [आकृति 13.1(iv)]।

आकृति 13.1

यदि काटने वाला तल शंकु के शीर्ष V से जाने वाली स्थिति में हो, तो परिच्छेद एक बिन्दु, एक सरल रेखा या प्रतिच्छेद करने वाली रेखाओं का युग्म है। इन्हें अपभ्रष्ट (degenerated) शंकु परिच्छेद कहते हैं।

हम शंकु परिच्छेदों का तलीय वक्र के रूप में अध्ययन करेंगे। इस उद्देश्य के लिए उन परिभाषाओं को प्रयोग करना सुविधाजनक है जिनमें वक्र केवल तल में स्थित है। इस प्रणाली के अनुसार, परवलय, दीर्घवृत्त, अतिपरवलय को एक स्थिर बिन्दु, **नाभि** (Focus), और तल की एक स्थिर सरल रेखा, **नियता** (Directrix) के पदों में परिभाषित किया जाता है। यदि F नाभि और l नियता है तब तल के सभी बिन्दुओं का समुच्चय जिनकी **F** से दूरी r और l से लाम्बिक दूरी d में एक नियत अनुपात e होता है, शंकु परिच्छेद बनाता है। नाभि से जाने वाली और नियता पर लम्ब रेखा शांकव की **अक्ष** कहलाती है। **अचर** e को शंकु परिच्छेद की **उत्केन्द्रता** (eccentricity) कहते हैं। ये शंकु परिच्छेद तीन श्रेणियों में बाँटें जाते है :

दीर्घवृत्त : $0 < e < 1$ परवलयः $e = 1$ अतिपरवलयः $e > 1$.

आकृति 13.2

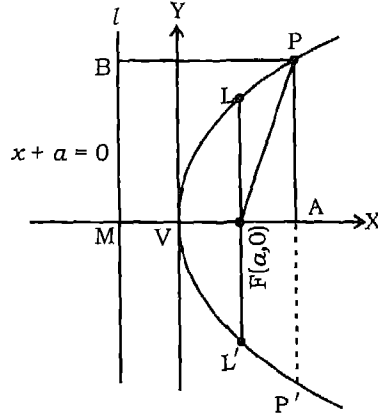
हम इन शंकु परिच्छेदों के समीकरण मानक रूप में प्राप्त करेंगें और उनका विस्तार से अध्ययन करेंगे।

13.3 परवलय (Parabola)

परिभाषा 1 एक परवलय तल के उन सभी बिन्दुओं का समुच्चय है जो तल के एक निश्चित बिन्दु और एक निश्चित सरल रेखा से समदूरस्थ हैं। निश्चित बिन्दु को **नाभि** (Focus) और निश्चित सरल रेखा को **नियता** (Directrix) कहते हैं।

हम परवलय के समीकरण को निम्न प्रकार से प्राप्त करते हैं :

मान लीजिए कि नाभि F और नियता l है। F से नियता पर लम्ब FM खींचिए और FM

को बिन्दु V पर समद्विभाजित कीजिए। MV को X तक बढ़ाइए। मध्य बिन्दु V स्पष्टतः परवलय पर है और आकृति 13.3 के अनुसार परवलय का शीर्ष (vertex) कहलाता है। V को मूलबिन्दु, मानकर VX को x–अक्ष और इसके लम्बवत् VY को y–अक्ष लीजिए। मान लीजिए कि नाभि की नियता से दूरी $2a$ है। तब, नाभि के निर्देशांक $(a, 0), a > 0$ हैं तथा नियता का समीकरण $x + a = 0$ है। मान लीजिए परवलय पर कोई बिन्दु P (x, y) है। परिभाषा के अनुसार, PF दूरी, बिन्दु P से नियता l की दूरी d के बराबर होनी चाहिए।

आकृति 13.3

दूरी PF इस प्रकार है

$$PF = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

P की रेखा l से दूरी

$$d = | x + a | \text{ है।}$$

चूँकि $PF = d$, हम पाते हैं

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = | x + a |$$

या $$(x-a)^2 + y^2 = | x + a |^2 = (x + a)^2$$

या $$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

या $$y^2 = 4ax, a > 0 \qquad (1)$$

वक्र का प्रत्येक बिन्दु समीकरण (1) को संतुष्ट करता है। पुनः, सोपानों के क्रम उलटने पर यह दिखाया जा सकता है कि प्रत्येक बिन्दु जो इस समीकरण को संतुष्ट करता है परिभाषा

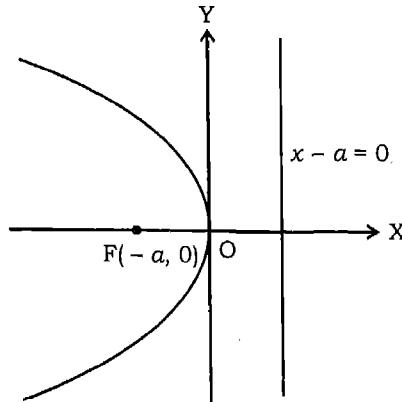
प्रतिबन्ध को संतुष्ट करता है। यह परवलय के समीकरण का मानक रूप है। जिसका शीर्ष, मूल बिन्दु, नाभि $(a, 0)$ तथा नियता $x = -a$ है। यदि $a > 0, x$ का मान धनात्मक या शून्य हो सकता है परन्तु ऋणात्मक नहीं। इस स्थिति में परवलय को प्रथम और चतुर्थ पाद में अनिश्चित रूप से दूर तक बढ़ाया जा सकता है और परवलय का अक्ष, x– अक्ष का धनात्मक भाग है।

उपर्युक्त समीकरण के निरीक्षण से निम्नांकित निष्कर्ष तथा परिभाषाएँ प्राप्त होती हैं :

1. यदि परवलय $y^2 = 4ax$ पर (x,y) कोई बिन्दु है, तो $(x, -y)$ भी परवलय पर एक बिन्दु है। इसलिए, परवलय x– अक्ष के परितः सममित है जो परवलय की **सममित अक्ष** है।

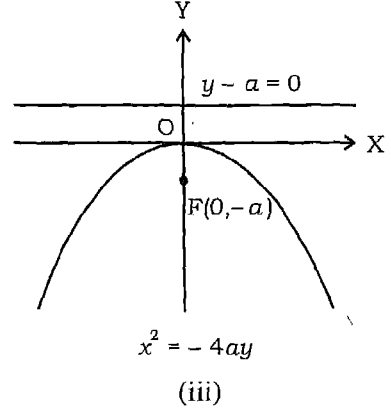
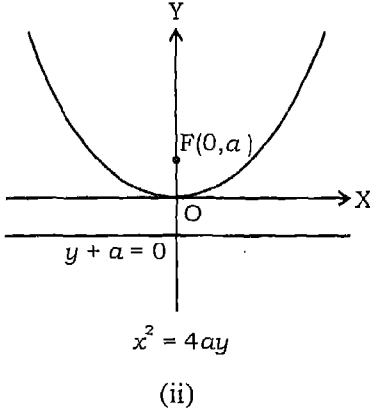
2. संख्या a को परवलय की **नाभीय लम्बाई** (Focal length) कहते हैं।

3. नाभि से जाने वाली और परवलय की अक्ष के लम्बवत जीवा को **नाभिलम्ब जीवा** (Latus ractum) कहते हैं। इस प्रकार $x = a$ नाभिलम्ब जीवा का समीकरण है। नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई इसके शीर्षों के निर्देशांको से ज्ञात की जा सकती है। समीकरण (1) में x के लिए a प्रतिस्थापित करने से, हम पाते हैं $y^2 = 4a \times a$ या $y = \pm 2a$ । अतः नाभिलम्ब जीवा के शीर्ष बिन्दु $(a, 2a)$ और $(a, -2a)$ हैं। इसलिए, नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई $4a$ है।

4. $y^2 = -4ax$ में यदि $a > 0$, तो x का मान कोई भी ऋणात्मक संख्या या शून्य हो सकता है परन्तु कोई धनात्मक मान नहीं हो सकता है इसलिए, इस स्थिति में परवलय बाईं ओर खुलता है (आकृति 13.4(i))।

(i)

आकृति 13.4

5. यदि परवलय की अक्ष y–अक्ष के अनु हो, x और y की भूमिका परस्पर बदल जाती है। तब परवलय का समीकरण $x^2 = 4ay$, नाभि $(0, a)$ और नियता $y = -a$ हो जाती है। समीकरण

का आलेख आकृति 13.4 (ii) में दिया गया है। इस स्थिति में परवलय ऊपर की ओर खुलता है। यदि समीकरण $x^2 = -4ay$ है, इसका आलेख आकृति 13.4 (iii) में दिया है और परवलय नीचे की ओर खुलता है। इन स्थितियों में $-y$ अक्ष सममितीय अक्ष है।

आकृति 13.4

6. नाभि से नियता तथा सममित अक्ष के प्रतिच्छेद बिन्दु को मिलाने वाले रेखा खण्ड का मध्य बिन्दु शीर्ष, होता है।

उदाहरण 1 नाभि (5,0) और नियता $x = -5$ वाले परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए तथा नाभिलम्ब – जीवा की लम्बाई भी बताइए।

हल यहाँ a का मान 5 है। x – अक्ष और नियता $x = -5$ का प्रतिच्छेद बिन्दु (–5,0) है। (5,0)और (–5,0) को मिलाने वाली रेखाखण्ड का मध्य बिन्दु (0,0) है, इसलिए शीर्ष (0,0) पर है। अतः, परवलय का समीकरण

$$y^2 = 4 \times 5x = 20x$$

है। नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई $= 4a = 4 \times 5 = 20$ है।

उदाहरण 2 यदि एक परवलय का समीकरण $y^2 = 12x$ है, तो नाभि के निर्देशांक, नियता का समीकरण और नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल दिया समीकरण $y^2 = 4ax$ के रूप का है जहाँ a धनात्मक है, इसलिए,

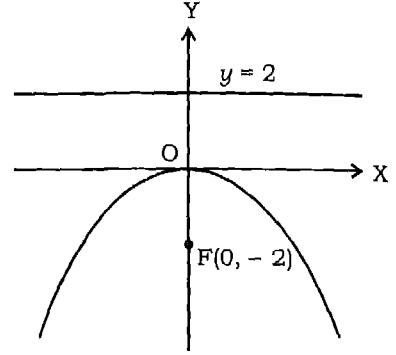
$$4a = 12 \text{ या } a = 3$$

अतः नाभि के निर्देशांक (3,0), नियता का समीकरण $x = -3$ और नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई

$$4a = 4 \times 3 = 12 \text{ है।}$$

उदाहरण 3 यदि परवलय का समीकरण $x^2 = -8y$ है, नाभि के निर्देशांक, नियता का समीकरण और नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल दिया समीकरण $x^2 = -4ay$ (1) के रूप का है जहाँ a धनात्मक है।

इसलिए, नाभि y–अक्ष की ऋण दिशा में है और परवलय नीचे की ओर खुलता है (आकृति 13.5)। दिए समीकरण की तुलना समीकरण (1) से करने पर, हम पाते हैं $-4a = -8$ या $a = 2$ इसलिए, नाभि के निर्देशांक (0,–2) हैं और नियता का समीकरण $y = 2$ है। नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई $4a = 8$ है।

आकृति 13.5

प्रश्नावली 13.1

निम्नलिखित प्रश्न 1 से 4 तक प्रत्येक में शीर्ष को मूलबिन्दु पर लेकर परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जो दिए प्रतिबन्ध को संतुष्ट करता है :

1. नाभि (4,0), नियता $x = -4$

2. नाभि (0,–2), नियता $y = 2$

3. (2,3) से जाता है और अक्ष x–अक्ष के अनु है।

4. (2,–3) से जाता है y–अक्ष के सापेक्ष सममित है।

निम्नलिखित प्रश्न 5 से 8 तक प्रत्येक परवलय के लिए, नाभि के निर्देशांक तथा नियता के समीकरण ज्ञात कीजिए :

5. $y^2 = 8x$

6. $x^2 = 6y$

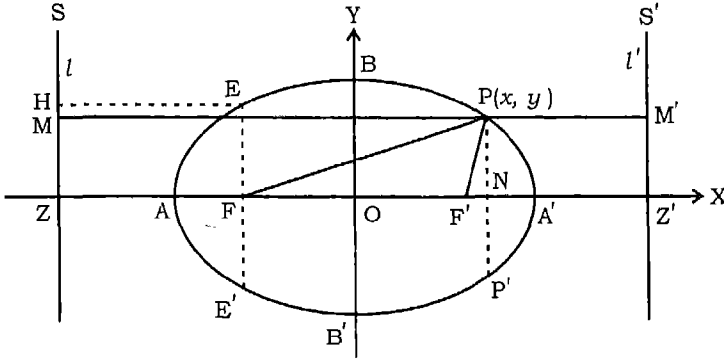
7. $y^2 = -12x$

8. $x^2 = -16y$

13.4 दीर्घवृत्त (Ellipse)

परिभाषा 2 दीर्घवृत्त तल के उन बिन्दुओं का समुच्चय है जिनकी तल में एक स्थिर बिन्दु और तल की एक स्थिर सरल रेखा से दूरियों में एक अचर अनुपात, एक से कम, होता है। स्थिर बिन्दु को **नाभि** कहते हैं, स्थिर सरल रेखा को **नियता** कहते हैं और अचर अनुपात e (<1) को दीर्घवृत्त की **उत्केन्द्रता** (eccentricity) कहते हैं।

हम अब दीर्घवृत्त का समीकरण व्युत्पन्न करेंगे।

मान लीजिए दीर्घवृत्त की नियता l, नाभि F और उत्केन्द्रता e है (आकृति 13.6)।

आकृति 13.6

F से l पर FZ लम्ब डाला। चूँकि $e < 1$, हम ZF को $1 : e$ के अनुपात में अन्तः तथा बाह्यतः दोनों प्रकार से विभक्त कर सकते हैं। मान लीजिए ऐसे विभाज्य बिन्दु A तथा A′ हैं।

तब $\quad FA = e \, . \, AZ \qquad (1)$

और $\quad FA' = e \, . \, A'Z \qquad (2)$

अतः दीर्घवृत्त की परिभाषा से, A तथा A′ दीर्घवृत्त पर स्थित हैं।

मान लीजिए A A′ का मध्यबिन्दु O है और मान लीजिए $AA' = 2a$ । तब, $0A = a = 0A'$

तथा $\quad 2a = AA' = AF + FA' = e\,(AZ + A'Z)$

या $\quad 2a = e\,[(OZ - OA) + (OZ + OA')]$

या $\quad a = e.OZ \quad$ (चूँकि $OA = OA'$)

इसलिए $OZ = \dfrac{a}{e} \qquad (3)$

(2) में से (1) घटाने पर, हम पाते हैं

$$FA' - FA = e\,(A'Z - AZ)$$

या $\quad (OF + OA') - (OA - OF) = e \, . \, AA'$

या $\quad 2OF = 2ae$

इसलिए $\quad OF = ae \qquad (4)$

अब O को मूलबिन्दु, OA′ को $x-$ अक्ष और OB को जो OA पर लम्ब है, को $y-$अक्ष लें तब नाभि बिन्दु $(-ae, 0)$ और नियता का समीकरण $x = -\dfrac{a}{e}$ है।

मान लीजिए दीर्घवृत्त पर कोई बिन्दु $P(x,y)$ है, और PM नियता पर लम्ब तथा PN, AA′ पर लम्ब है।

तब $\quad FP = e.\,PM$

या $\quad FN^2 + NP^2 = e^2\, ZN^2$

या $\quad (OF + ON)^2 + y^2 = e^2\,(OZ + ON)^2$

या $\quad (ae + x)^2 + y^2 = e^2\left(\dfrac{a}{e} + x\right)^2$ (3) और (4) को प्रयुक्त करने पर

या $\quad a^2e^2 + x^2 + 2aex + y^2 = a^2 + e^2\,x^2 + 2aex$

सरल करने पर, हम पाते हैं

$$x^2(1 - e^2) + y^2 = a^2(1 - e^2)$$

अर्थात्
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1 \qquad (5)$$

$a^2(1-e^2)$ के लिए b^2 लिखने पर (क्योंकि $e^2 < 1$) समीकरण (5) को इस प्रकार लिखा जा सकता है।

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (6)$$

इस प्रकार, (6) दीर्घवृत्त पर प्रत्येक बिन्दु $P(x, y)$, (6) को संतुष्ट करता है। पुनः यदि कोई बिन्दु $P(x, y)$, (6) को संतुष्ट करता है, तब यह दिखाना सरल है कि $PF = e\,.\,PM$, ताकि ऐसे बिन्दु P दीर्घवृत्त पर स्थित हों। समीकरण (6) दीर्घवृत्त के समीकरण का मानक रूप है।

दीर्घवृत्त के समीकरण (6) के निरीक्षण से हम पाते हैं :–

1. यदि (x, y), (6) को संतुष्ट करता है, तो $(-x, y)$, $(x, -y)$ और $(-x, -y)$ भी (6) को संतुष्ट करते हैं। इससे यह स्पष्ट होता है कि **दीर्घवृत्त दोनों निर्देशाक्षों और मूलबिन्दु के सापेक्ष सममित** है। **इस सममिति गुणधर्म के कारण दीर्घवृत्त में दो नाभियाँ और दो नियतायें होती हैं।**

2. क्योंकि $b = a\sqrt{1-e^2}$, अतः $0 < b < a$.

3. दीर्घवृत्त $x-$ अक्ष को प्रतिच्छेदित करता है जहाँ $y = 0$, अर्थात जहाँ $x^2 = a^2$ या $x = \pm a$ परिणामतः a और $-a$, x–अन्तः खण्ड हैं। संगत बिन्दु A′ $(-a, 0)$ और A $(a, 0)$ दीर्घवृत्त के **शीर्ष** (Vertices) कहलाते हैं (आकृति 13.6)। रेखाखण्ड AA′ दीर्घवृत्त की **दीर्घअक्ष** (major axis) कहलाता है। दीर्घवृत्त y–अक्ष को वहाँ प्रतिच्छेदित करता है जहाँ $x = 0$, अर्थात उसके संगत $y^2 = b^2$ या $y = \pm b$ अतः ऐसे बिन्दु B $(0, b)$ और B′ $(0, -b)$ हैं। रेखाखण्ड BB′ को दीर्घवृत्त का **लघुअक्ष** (Minor axis) कहते हैं। दीर्घअक्ष और लघुअक्ष की लम्बाइयाँ क्रमशः $2a$ और $2b$ हैं। ध्यान दीजिए कि BB′ ज्ञात करने के लिए, हम (6) में $x = 0$ रखतें हैं, तब OB $= y = b$ और BB′ $= 2.$OB $= 2b$। दीर्घ और लघु अक्षों का प्रतिच्छेद बिन्दु दीर्घवृत्त का **केन्द्र** (Centre) कहलाता है। इसलिए दीर्घवृत्त (6) का केन्द्र (0, 0) है।

4. मूलबिन्दु से धन दिशा में एक बिन्दु F′ और दूसरा बिन्दु Z′ लीजिए जो ऐसा हो कि OF = OF′ = ae और

$$OZ = OZ' = \frac{a}{e}.$$

Z′ S′, ZZ′ पर और PM′, Z′S′ पर क्रमशः लम्ब खींचिए। समीकरण (5) को इस प्रकार लिखा जा सकता है।

$$x^2(1-e^2) + y^2 = a^2 - a^2e^2$$

या $\quad x^2 - 2aex + a^2e^2 + y^2 = e^2x^2 - 2aex + a^2$ ($2aex$ को दोनों पक्षों में से घटाने पर)

या $\quad (x-ae)^2 + y^2 = e^2\left(\frac{a}{e} - x\right)^2$

या $\quad PF'^2 = e^2.PM'^2$

इसलिए, दीर्घवृत्त के किसी बिन्दु P और नाभि F′ के बीच की दूरी इसकी Z′S′ से दूरी की e गुनी है। इस प्रकार हम नाभि F′ नियता Z′S′ और उसी उत्केन्द्रता से दीर्घवृत्त का एक समान समीकरण पाते हैं।

इस प्रकार, दीर्घवृत्त, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, के लिए, $a > b$, हम पाते हैं

शीर्ष $(\pm a, o)$, नाभियाँ $(\pm ae, o)$

और नियताऐं $x = \pm \frac{a}{e}$.

5. F से जाने वाली और दीर्घअक्ष के लम्बवत् जीवा को दीर्घवृत्त की **नाभिलम्ब जीवा** (latus rectum) कहते हैं (आकृति 13.6)। अब, हम नाभिलम्ब जीवा EFE′ की लम्बाई ज्ञात करेंगे।

चूँकि E वक्र पर है, हम परिभाषा से पाते हैं

$$\begin{aligned} EF &= e.EH = e.FZ \\ &= e\,(OZ - OF) = e\left(\frac{a}{e} - ae\right) \\ &= a - ae^2 = a - a.\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \\ &= \frac{b^2}{a}. \end{aligned}$$

इसलिए नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई $2\frac{b^2}{a}$ है।

6. दीर्घवृत्त पर स्थित किसी बिन्दु P की नाभीय दूरी, बिन्दु P की नाभि से दूरी अर्थात् PF है। दीर्घवृत्त के किसी बिन्दु की नाभीय दूरियों का योग अचर होता है जो दीर्घअक्ष की लम्बाई के बराबर होता है।

इसे इस प्रकार देखा जा सकता है :

परिभाषा से, हम पाते हैं

FP = e.PM और F′ P = e.PM′

इसलिए $\quad FP + F'P = e\,(PM + PM')$

$$= e\,MM' = e\,(2.ZO)$$

$$= e\left(\frac{2a}{e}\right) = 2a$$

अर्थात् $\quad FP + F'P = 2a$

विकल्पतः, हम पाते हैं :

$$FP = e.PM = e\,NZ = e\,(OZ + ON)$$

$$= e\left(\frac{a}{e} + x\right) = a + ex,$$

इसी प्रकार $F'P = ePM' = e\,NZ' = e\,(OZ - ON)$

$$= e\left(\frac{a}{e} - x\right) = a - ex.$$

इस प्रकार नाभीय दूरियाँ $a + ex$ और $a - ex$ हैं।

इसलिए $\quad FP + F'P = (a + ex) + (a - ex) = 2a$

7. दीर्घवृत्त के प्रत्येक बिन्दु (x, y) के लिए,

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

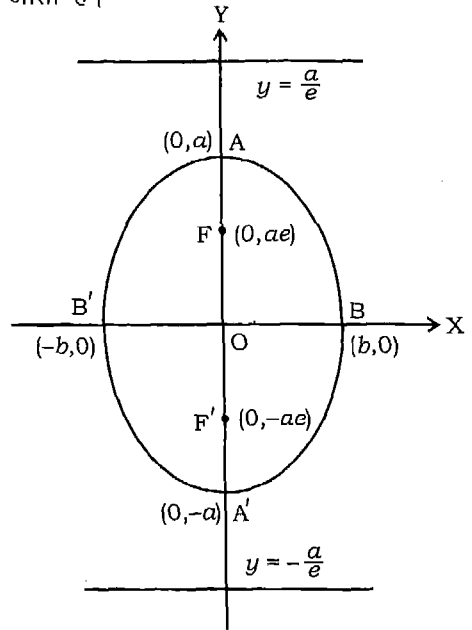
अर्थात् $\quad x^2 \leqslant a^2$, इस प्रकार $-a \leqslant x \leqslant a$

इसलिए, दीर्घवृत्त रेखाओं $x = a$ और $x = -a$ के मध्य स्थित है और इन रेखाओं को स्पर्श करता है। इसी प्रकार, यह रेखाओं $y = -b$ और $y = b$ के मध्य स्थित है और इन रेखाओं को स्पर्श करता है।

8. **उत्केन्द्रता** दीर्घवृत्त की **सपाटता** (Flatness) **की माप** है। दो नाभियों F, F′ के बीच की दूरी $2ae$ है। ज्यों–ज्यों e बढ़ता है, यह दूरी बढ़ती है। दूसरे शब्दों में नाभि, केन्द्र से दूर होता जाता है तथा दीर्घवृत्त और सपाट हो जाता है।

तथा $a^2 - b^2 = a^2 - a^2(1 - e^2) = a^2e^2$ से हम प्रेक्षण करते हैं कि जैसे–जैसे e बढ़ता है, वैसे–वैसे $a^2 - b^2$ बढ़ता है अतः दीर्घअक्ष लघुअक्ष की तुलना में अधिक सपाट, अधिक लम्बा हो जाता है।

9. यदि दीर्घवृत्त की दीर्घ अक्ष y–अक्ष के अनु हो, तब दीर्घवृत्त के समीकरण का रूप $a^2 > b^2$ के लिए, $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ हो जाता है।

इस दीर्घवृत्त के लिए, शीर्ष $(0, \pm a)$, नाभियाँ $(0, \pm ae)$ और नियताओं के समीकरण $y = \pm \frac{a}{e}$ हैं। लघुअक्ष के अन्त्य बिन्दु $(\pm b, 0)$ हैं (आकृति 13.7)।

आकृति 13.7

उदाहरण 4 दीर्घवृत्त का समीकरण $9x^2 + 16y^2 = 144$ है। दीर्घ एवं लघु अक्ष की लम्बाइयाँ, उत्केन्द्रता, नाभियों और शीर्षों के निर्देशांक तथा नियताओं का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल मानक रूप में दीर्घवृत्त का दिया समीकरण

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9} = 1$$

है। अतः $a = 4$ और $b = 3$ जिससे दीर्घअक्ष और लघुअक्ष की लम्बाइयाँ क्रमशः 8 और 6 हैं a और b के मान, संबंध $b^2 = a^2(1- e^2)$ में प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैं

$$9 = 16(1- e^2), \text{ जिससे } e = \frac{\sqrt{7}}{4} \text{ मिलता है।}$$

अतः, नाभियाँ $(\sqrt{7}, 0)$ और $(-\sqrt{7}, 0)$, तथा शीर्ष $(4, 0)$ और $(-4, 0)$ हैं। तथा नियताओं का समीकरण $x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{16}{\sqrt{7}}$ हैं

उदाहरण 5 केन्द्र को मूलबिन्दु लेकर दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जब कि दीर्घअक्ष की लम्बाई 12 और एक नाभि (4, 0) है।

हल चूँकि एक नाभि (4, 0) है, हम पाते हैं कि $ae = 4$ तथा हमें दिया है कि

$2a = 12$, इस प्रकार $a = 6$

अतः $e = \frac{2}{3}$. अब, हमें b^2 ज्ञात करना है जो कि

$$b^2 = a^2(1-e^2)$$

से ज्ञात किया जा सकता है।

इस प्रकार $b^2 = 36\left(1-\frac{4}{9}\right) = 20$

इसलिए, दीर्घवृत्त का अभीष्ट समीकरण

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20} = 1 \text{ है।}$$

उदाहरण 6 नाभियाँ (± 5, 0) और एक नियता $x = \frac{36}{5}$ वाले दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल हम पाते हैं

$$ae = 5, \frac{a}{e} = \frac{36}{5}$$

इसलिए $a^2 = 36$, जिससे मिलता है $a = 6$

अतः $e = \frac{5}{6}$

अब $b^2 = a^2(1-e^2) = 36\left(1-\frac{25}{36}\right)$

अर्थात् $b^2 = 11$

इस प्रकार, दीर्घवृत्त का अभीष्ट समीकरण

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{11} = 11 \text{ है।}$$

प्रश्नावली 13.2

निम्नलिखित प्रश्नों 1 से 7 तक प्रत्येक दीर्घवृत्त में दीर्घ और लघु अक्ष की लम्बाइयाँ, नाभियाँ और शीर्षो के निर्देशांक, उत्केन्द्रता तथा नियताओं का समीकरण ज्ञात कीजिए :

1. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$

2. $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$

3. $\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{289}=1$

4. $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$

5. $x^2 + 16y^2 = 16$

6. $16x^2 + y^2 = 16$

7. $3x^2 + 2y^2 = 18$

प्रश्नों 8 से 14 तक प्रत्येक में, दिये प्रतिबन्धों को संतुष्ट करते हुऐ दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

8. शीर्षो $(\pm 5, 0)$; नाभियाँ $(\pm 4, 0)$

9. नाभियाँ $(0, \pm 5)$; शीर्ष $(0, \pm 13)$

10. शीर्षों (0, ± 10); $e=\frac{4}{5}$

11. नाभियाँ (0, ± 4); $e=\frac{4}{5}$

12. अक्षें निर्देशाक्षों के अनु, (4, 3) और (–1, 4) से जाता है।

13. नाभियाँ (± 3, 0) और (4, 1) से जाता है।

14. $e=\frac{3}{4}$, नाभि y–अक्ष पर, केन्द्र मूलबिन्दु पर और (6, 4) से जाता है।

15. ऐसे सभी बिन्दुओं के समुच्चय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिनकी (0, 4) से दूरी रेखा $y = 9$ से दूरी की $\frac{2}{3}$ है।

13.5 अतिपरवलय (Hyperbola)

परिभाषा 3 एक अतिपरवलय तल के सभी बिन्दुओं का समुच्चय है जिनकी तल के एक निश्चित बिन्दु और तल की एक निश्चित रेखा से दूरियों में एक निश्चित अनुपात होता है, जिसका मान एक से अधिक होता है। निश्चित बिन्दु को **नाभि**, निश्चित सरल रेखा को **नियता** और निश्चित अनुपात **e** को अतिपरवलय की **उत्केन्द्रता** (eccentricity) कहते हैं।

हम अब अतिपरवलय का समीकरण व्युत्पन्न करेंगे।

मान लीजिए अतिपरवलय की नियता l, नाभि F और उत्केन्द्रता e है। (आकृति 13.8)

बिन्दु F से, नियता पर FZ लम्ब डालिए। चूँकि $e>1$, हम ZF को $e:1$ में अन्तः तथा बाह्यतः दोनों में विभक्त कर सकते हैं। मान

लीजिए ऐसे विभाजक बिन्दु A और A′ है।

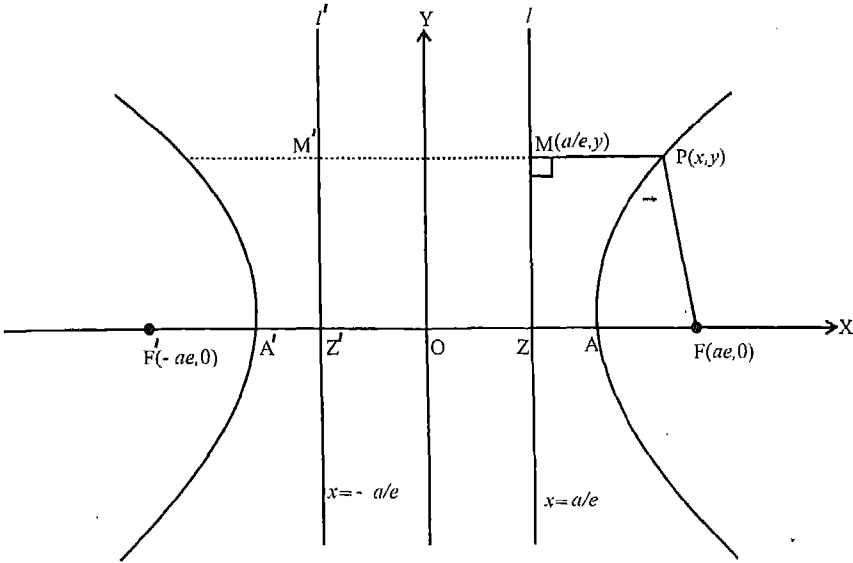
तब $\quad AF = e \,.\, AZ \qquad (1)$

और $\quad A'F = e \,.\, A'Z \qquad (2)$

इसलिए, अतिपरवलय की परिभाषा से, A और A′ अतिपरवलय पर स्थित हैं। मान लीजिए AA′ का मध्य बिन्दु O है और $AA' = 2a$, तब $A'O = a = OA$

(1) और (2) को जोड़ने पर, हम पाते हैं

$$AF + AF' = e(AZ + A'Z)$$

या $\quad (OF–OA) + (OA' + OF) = eAA' \; (OA' = OA = a)$

आकृति 13.8

या $\quad 2OF = e.AA' = 2ae$

अर्थात् $\quad OF = ae \qquad (3)$

(2) में से (1) को घटाने पर, हम पाते हैं

$$A'F - AF = e\ .\ (AZ - AZ)$$

या $\quad AA' = e.[(A'O + OZ) - (OA - OZ)]$

या $\quad 2a = 2e\ .\ OZ$

अर्थात् $\quad OZ = \dfrac{a}{e} \qquad (4)$

अब O को मूलबिन्दु, OAX को x–अक्ष और लम्बवत् रेखा OY को y–अक्ष लीजिए, तब नाभि F बिन्दु $(ae, 0)$ और नियता $x = \dfrac{a}{e}$ है।

मान लीजिए अतिपरवलय पर कोई बिन्दु $P(x, y)$ है और PM नियता पर लम्ब है और PN, x–अक्ष पर लम्ब है।

तब $\quad FP = e.PM$

या $FP^2 = e^2 PM^2$

या $FN^2 + NP^2 = e^2 NZ^2$

या $(ON - OF)^2 + y^2 = e^2 (ON - OZ)^2$

या $(x - ae^2) + y^2 = e^2 \left(x - \frac{a}{e}\right)^2$ [(3) और (4) को प्रयुक्त करने पर]

या $x^2 - 2aex + a^2e^2 + y^2 = e^2x^2 - 2aex + a^2$

इसलिए $x^2(e^2 - 1) - y^2 = a^2(e^2 - 1)$

अर्थात् $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2 - 1)} = 1 \quad (5)$$

चूँकि $e > 1$, $e^2 - 1$ धनात्मक है, $a^2(e^2 - 1)$ के लिए b^2 उपर्युक्त समीकरण में लिखने पर, हम पाते हैं

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (6)$$

यह अतिपरवलय के समीकरण का मानक रूप है।

टिप्पणी विशेष स्थिति में, जब $b^2 = a^2$ अर्थात $a^2(e^2 - 1) = a^2$ अर्थात $e = \sqrt{2}$, समीकरण $x^2 - y^2 = a^2$ हो जाता है। इस समीकरण से निरूपित अतिपरवलय को **समकोणीय अतिपरवलय** (rectangular hyperbola) कहते हैं।

अब, हम अतिपरवलय के संदर्भ में निरीक्षण द्वारा निम्नलिखित परिभाषाएँ और गुणधर्म पाते हैं :

1. चूँकि x के स्थान पर $-x$ और y के स्थान पर $-y$ रखने से समीकरण (6) अपरिवर्तित रहता हैं, अतः वक्र निर्देशांक्षों के सापेक्ष सममित है। **इस सममित गुणधर्म के कारण अतिपरवलय की दो नाभियों और दो नियतायें होती हैं।**

2. अतिपरवलय और इसकी अक्ष के प्रतिच्छेद बिन्दु **अतिपरवलय के शीर्ष** (vertices) **कहलाते हैं जो** $(\pm a, 0)$ **है।** इन्हें अतिपरवलय के समीकरण में $y = 0$ रखकर प्राप्त किया जा सकता है।

3. **नाभियों के निर्देशांक** $(\pm ae, 0)$ **और नियताओं के समीकरण** $x = \pm\frac{a}{e}$ **है।**

शीर्षों को मिलाने वाला रेखाखण्ड **अनुप्रस्थ अक्ष** (transverse axis) और बिन्दुओं (o,b) तथा (o,$-b$) को मिलाने वाला रेखाखण्ड **संयुग्मी अक्ष** (Conjugate axis) कहलाता है। यहाँ यह ध्यान देना होगा कि वक्र की किसी भी शाखा का संयुग्मी अक्ष से कोई भी उभयनिष्ठ बिन्दु नहीं होता है। राशियाँ $2a$ और $2b$ क्रमशः अनुप्रस्थ अक्ष और संयुग्मी अक्ष की लम्बाइयाँ कहलाती हैं।

चूँकि $\frac{x^2}{a^2}=1+\frac{y^2}{b^2}\geq 1$, इसका अर्थ है कि अतिपरवलय के सभी बिन्दुओं (x, y) के लिए,

$|\frac{x}{a}| \geq 1$ अर्थात $x \leqslant -a$ या $x \geqslant a$

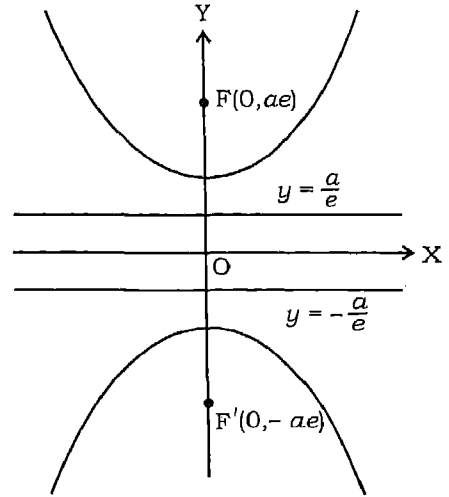
इस प्रकार, अतिपरवलय की दो शाखाएँ हैं, एक अर्द्धतल $x \leqslant -a$ और दूसरी अर्द्धतल $x \geqslant a$ में।

क्योंकि $b^2 = a^2(e^2-1)$, दिये a के लिए, जितनी e छोटी होगी तो b भी छोटा होगा। इसलिए $\frac{x^2}{a^2}=1+\frac{y^2}{b^2}$ से, दिये a और y के लिए $\frac{x^2}{a^2}$ बड़ा होता जाता है ज्यों ज्यों b छोटा होता है। इसका अर्थ है कि दिए a, y के लिए, e के छोटे से छोटा होने पर, अतिपरवलय का बिन्दु P (x, y) दाँयी ओर और दूर होता जाता है। अतः उत्केन्द्रता के छोटा होने पर, अतिपरवलय की शाखाएँ, x–अक्ष की ओर अधिक मुड़ जाएगी। दूसरी ओर, यदि e बड़ी है, तब दिये a के लिए $\frac{y^2}{b^2}$ छोटा है। तब $\frac{x^2}{a^2}-1$ छोटा हो जाता है अर्थात् x छोटा है। इसलिए ज्यों ज्यों उत्केन्द्रता बढ़ती है शाखाएँ ऊपर की ओर अधिक खुलेंगी।

हमने शीर्षों को मिलाने वाली रेखा को x–अक्ष लिया है यदि हम इसे y–अक्ष लें, अतिपरवलय के समीकरण का रूप $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2} = 1$ होगा जबकि $b^2 = a^2(e^2-1)$ (आकृति 13.9)।

शीर्षों के निर्देशांक $(0, \pm a)$ **हैं, नाभियाँ** $(0, \pm ae)$ **हैं और नियताओं के समीकरण** $y=\pm\frac{a}{e}$ **हैं।**

आकृति 13.9

अतिपरवलय की **नाभिलम्ब जीवा** (Latus rectum) वह जीवा है जो किसी भी नाभि से जाती है और अनुप्रस्थ अक्ष के लम्बवत है। **नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई नाभीय चौड़ाई**

(Focal width) **कहलाती है** और इसे $\frac{2b^2}{a}$ के बराबर होने की सत्यता की जाँच की जा सकती है।

9. अतिपरवलय के समीकरण में अनुप्रस्थ अक्ष बड़े मान वाले हर के द्वारा देना आवश्यक नहीं हैं। यह धनात्मक पद है जिसका हर अनुप्रस्थ अक्ष देता है। उदाहरणतः $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1$ में अनुप्रस्थ अक्ष, x अक्ष के अनु, लम्बाई 8 है, जब कि $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{9}=1$ में अनुप्रस्थ अक्ष, y-अक्ष के अनु, लम्बाई 10 है।

टिप्पणी पूर्ववर्ती अध्याय में, हमने वृत्त के प्राचल समीकरण का अध्ययन किया है। शंकु परिच्छेद की स्थित में, प्राचल समीकरण

(i) परवलय $y^2 = 4ax$ का $x = at^2, y = 2at$ है जहाँ t प्राचल है।

(ii) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ का $x = a\cos\theta, y = b\sin\theta$ है जहाँ θ प्राचल है।

(iii) अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ का $x = a\sec\theta, y = b\tan\theta$ है जहाँ θ प्राचल है।

हम इन समीकरणों के विस्तृत वर्णन का अध्ययन उच्च कक्षाओं में करेगें।

उदाहरण 7 अतिपरवलय $4x^2-25y^2 = 100$ के शीर्षों, नाभियों के निर्देशांक, उत्केन्द्रता और नियताओं के समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल दिए समीकरण को 100 से भाग देने पर, हम पाते हैं।

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4} = 1$$

इस प्रकार, $a = 5, b = 2$ इससे हम पाते हैं

$$4 = 25\,(e^2-1)$$

इसलिए, $e^2 = \frac{29}{25}$, जिससे $e = \frac{\sqrt{29}}{5}$ मिलता है।

शीर्षों के निर्देशांक $(\pm a, 0) = (\pm 5, 0)$ और नाभियों के निर्देशांक $(\pm ae, o) = (\pm\sqrt{29}, 0)$ है।

नियताओं के समीकरण $x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{25}{\sqrt{29}}$ हैं।

उदाहरण 8 अतिपरवलय $16x^2 - 9y^2 = 144$ के शीर्षों, नाभियों के निर्देशांक, उत्केन्द्रता और नियताओं के समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल दिये समीकरण को लिखा जा सकता है।

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

इसलिए, $a = 3, \quad b = 4$

इससे $16 = 9(e^2 - 1)$, जिससे $e = \frac{5}{3}$ मिलता है।

इस प्रकार शीर्ष $(\pm 3, 0)$ और नाभियाँ $(\pm 5, 0)$ हैं। नियताओं के समीकरण $x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{9}{5}$ हैं।

उदाहरण 9 शीर्षों $(\pm 5,0)$ और नाभियाँ $(\pm 7,0)$ वाले अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल चूँकि शीर्ष x–अक्ष पर हैं और मूलबिन्दु मध्य बिन्दु है अतः समीकरण का रूप है

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

क्योंकि शीर्ष $(\pm 5, 0)$ और नाभियाँ $(\pm 7, 0)$ हैं इसलिए $a = 5$ तथा $ae = 7$ अर्थात् $e = \frac{7}{5}$, a और e का मान $b^2 = a^2(e^2 - 1)$ में रखने पर हमे प्राप्त होता है

$$b^2 = 25\left(\frac{49}{25} - 1\right) = 24$$

इसलिए, अतिपरवलय का समीकरण है

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$$

अर्थात्, $24x^2 - 25y^2 = 600$

उदाहरण 10 अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष $(\pm 6, 0)$ है और एक नियता $x = 4$ है।

हल चूँकि शीर्ष x–अक्ष पर है और उनका मध्य बिन्दु मूलबिन्दु है, इसलिए, समीकरण का रूप है

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

शीर्ष $(\pm a, o)$ है, इसलिए $a = 6$, है। क्योंकि नियता के समीकरण $x = \pm \frac{a}{e}$ हैं और एक नियता का समीकरण $x = 4$ दिया है,

इसलिए $4 = \frac{6}{e}$, जिससे $e = \frac{3}{2}$ मिलता है।

इसलिए $b^2 = a^2 . (e^2 - 1) = 36\left(\frac{9}{4} - 1\right) = 45$

इस प्रकार, अतिपरवलय का समीकरण है।

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{45} = 1 \text{ है।}$$

प्रश्नावली 13.3

निम्नलिखित अतिपरवलयों के शीर्षो, नाभियों के निर्देशांक, उत्केन्द्रता और नियताओं के समीकरण ज्ञात कीजिए :

1. $9x^2 - 16y^2 = 144$
2. $y^2 - 16x^2 = 16$
3. $3x^2 - 2y^2 = 1$
4. $16y^2 - 4x^2 = 1$

प्रश्न 5 से 9 तक प्रत्येक में, दिए गए प्रतिबन्धों को संतुष्ट करते हुऐ अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए

5. शीर्ष $(0, \pm 5)$, नाभियाँ $(0, \pm 8)$
6. शीर्ष $(\pm 7, 0)$, $e = \frac{4}{3}$
7. नाभियाँ $(0, \pm\sqrt{10})$ हैं तथा $(2, 3)$ से होकर जाता है
8. नाभियाँ $(0, \pm 4)$ हैं तथा अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई 6 है।
9. सभी बिन्दुओं के समुच्चय का समीकरण ज्ञात कीजिए जबकि उनकी बिन्दुओं $(4, 0)$ और $(-4, 0)$ से दूरियों का अन्तर सदैव 2 के बराबर है।

13.6 अनुप्रयोग

शंकु परिच्छेद अनेक क्षेत्रों में बहुत उपयोगी पाए गए हैं। उनमें से कुछ नीचे संक्षिप्त में प्रस्तुत हैं।

1. प्रक्षेप्य पथ एक परवलय है। पथ के समीकरण का ज्ञान होने पर अनेक महत्वपूर्ण परिणाम यथा प्राप्त महत्तम ऊँचाई, क्षैतिज तल पर परास और किसी विशेष क्षण पर वेग इत्यादि की गणना की जा सकती है।

2. लटकते केबिल पुल निर्माण में परवलयाकार जैसी चाप प्रयुक्त होती है। यदि लटकते पुल से जाने वाली सड़क का रास्ता प्रति क्षैतिज मीटर समान रूप से भारी है तब लटकती केबिल जिस रूप में लटकती है, वह लगभग परवलयाकार चाप जैसी होती है।

3. परवलयाकार परावर्तक के अक्ष के समान्तर आने वाली प्रकाश किरण/ध्वनि तरंग के परावर्तन के बाद नाभि पर केन्द्रित होने के गुणधर्म और विलोमतः उन्हें समान्तर बेलनाकार प्रकाश किरण/ध्वनितरंग में विक्षेपित करने के गुणधर्म के कारण, कार, आटोमोबाइल्स, लाउडस्पीकर, सौर कुकर, टेलिस्कोप इत्यादि में परवलयाकार परावर्तक प्रयोग में आते हैं।

4. सौर मण्डल के ग्रहों की कक्षाएं सूर्य को एक नाभि पर रखकर दीर्घवृत्ताकार होती हैं। कृत्रिम उपग्रह की कक्षाएं पृथ्वी के परितः दीर्घवृत्ताकार होती हैं।

5. अर्ध दीर्घवृत्ताकार स्प्रिंग और दीर्घवृत्ताकार गीयर का इंजीनियरिंग और उद्योग में महत्वपूर्ण अनुप्रयोग है।

6. भौतिकी में यह दिखाया गया है कि यदि एक कण प्रतिलोम वर्ग क्षेत्र के प्रभाव में गति करे तो इसको पथ का वर्णन शंकु परिच्छेद के माध्यम से किया जा सकता है।

7. अतिपरवलय का अनुप्रयोग बैलेस्टिक्स (प्राक्षेपिकीय) के क्षेत्र में है। माना कि एक बंदूक चलाई जाती है। यदि ध्वनि दो सुनने के स्थानों, जो अतिपरवलय की दोनों नाभियों के स्थान पर स्थित हैं, विभिन्न समयों पर पहुँचती हैं तो समय अन्तराल से उन दोनों सुनने के स्थानों (दोनों नाभियाँ) के बीच की दूरी की गणना की जा सकती है।

आइए अब अनुप्रयोगों के कुछ उदाहरण देते हैं।

उदाहरण 11 एक परवलयाकार परावर्तक की नाभि, इसके केन्द्र से 6 सेमी की दूरी पर है जैसा कि आकृति (13.10) में दर्शाया गया है। यदि परावर्तक 20 सेमी गहरा है, तो इसका व्यास कितना है?

हल चूँकि नाभि की केन्द्र शीर्ष से दूरी 6 सेमी है, हम $a = 6$ सेमी पाते हैं। यदि शीर्ष मूलबिन्दु और दर्पण की अक्ष, x–अक्ष के धन भाग के अनु हो तो परवलयाकार परिच्छेद का समीकरण है।

$$y^2 = 24x$$

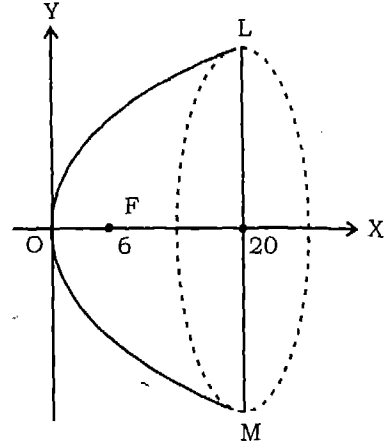
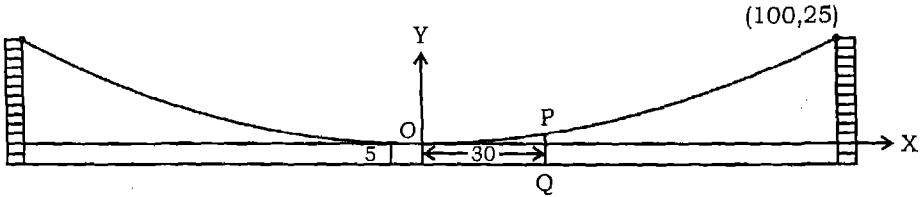
यदि $x = 20$, हम पाते हैं

$$y^2 = 480$$

इसलिए $\quad y = \pm 4\sqrt{30}$

अतः $LM = 2y = 2.4\sqrt{30} = 8\sqrt{30}$ सेमी

आकृति 13.10

उदाहरण 12 परवलय के रूप में झूलते हुए किसी पुल की दो मीनारों के शिखर सड़क से 30 मीटर ऊंचे हैं और 200 मीटर की दूरी पर हैं। यदि पुल के केन्द्र पर केबिल सड़क पथ से 5 मीटर ऊँचा है, केन्द्र से 30 मीटर पर ऊर्ध्वाधर समर्थक केबिल की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल कल्पना कीजिए कि पुल परवलयाकार चाप में लटका हुआ है जिसका शीर्ष निम्नतम बिन्दु और अक्ष ऊर्ध्वाधर है। निर्देशाक्षों को आकृति 13.11 में दिखाए अनुसार चुना गया है।

आकृति 13.11

तब, परवलय के समीकरण का रूप $x^2 = 4ay$ होता है।

चूँकि यह बिन्दु (100, 25) से जाता है। हम पाते हैं

$$(100)^2 = 4a\,(25)$$

या $\quad a = \dfrac{100\times100}{25\times4} = 100$

बताई गई ऊर्ध्वाधर समर्थक केबिल की लम्बाई $y + 5$ द्वारा दी गई है जहाँ y, परवलय $x^2 = 400y$ के बिन्दु $P(30, y)$ की कोटि है जिसका भुज 30 है। इस प्रकार

$$(30)^2 = 400y$$

या $$y = \frac{30 \times 30}{400} = \frac{9}{4}$$

इसलिए, वांछित लम्बाई है।

$$PQ = y + 5 = \frac{9}{4} + 5 = \frac{29}{4} = 7\frac{1}{4} \text{ मी.}$$

उदाहरण 13 15 सेमी लम्बी एक छड़ AB दोनों निर्देशाक्षों के बीच में इस प्रकार रखी गई है कि उसका एक सिरा A, x–अक्ष पर और दूसरा सिरा B, y अक्ष पर रहता है। छड़ पर एक बिन्दु $P(x, y)$ इस प्रकार लिया गया है कि AP = 6 सेमी है। P का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए AB छड़ है और इस पर बिन्दु $P(x, y)$ इस प्रकार है कि AP = 6 सेमी है।

चूँकि AB = 15 सेमी, इसलिए PB = 9 सेमी।

P से कमशः y–अक्ष और x–अक्ष पर क्रमशः लम्ब डालिए। माना कि $AR = p$ तथा $BQ = q$.

चूँकि ΔBQP और ΔPRA समरूप है, हम पाते हैं

$$\frac{q}{y} = \frac{9}{6} \text{ जिससे } q = \frac{3}{2}y \text{ प्राप्त होता है।}$$

और $$\frac{p}{x} = \frac{6}{9} \text{ जिससे } p = \frac{2}{3}x \text{ प्राप्त होता है।}$$

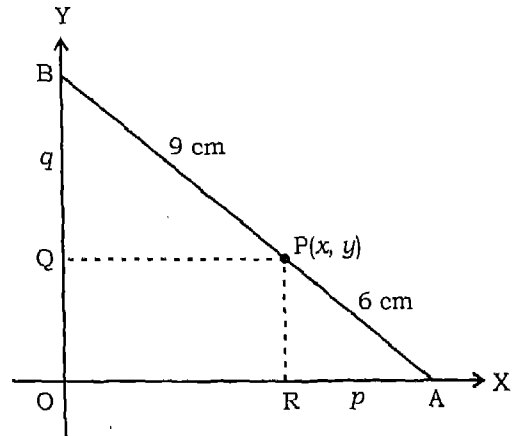
इसलिए $$OA = x + \frac{2}{3}x = \frac{5}{3}x$$

और $$OB = y + \frac{3}{2}y = \frac{5}{2}y$$

ΔBOA में $BO^2 + OA^2 = AB^2$

अतः $$\left(\frac{5}{2}y\right)^2 + \left(\frac{5}{3}x\right)^2 = 225$$

या $$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$$

अतः P का बिन्दुपथ दीर्घ वृत है।

आकृति 13.12

प्रश्नावली 13.4

1. यदि एक परवलयाकार परावर्तक का व्यास 20 सेमी और गहराई 5 सेमी है। नाभि ज्ञात कीजिए।
2. एक मेहराव परवलय के आकार का है और इसका अक्ष ऊर्ध्वाधर है। मेहराव 10 मीटर ऊँचा है और आधार में 5 मीटर चौड़ा है। परवलय के शीर्ष से 2 मीटर पर यह कितना चौड़ा है?
3. एक सर्वसम भारी झूलते पुल की केबिल परवलय के रूप में लटकी हुई है। सड़क पथ जो क्षैतिज है 100 मीटर लम्बा है तथा केबिल से जुड़े ऊर्ध्वाधर तारों पर टिका हुआ है जिसमें सबसे लम्बा तार 30 मीटर और सबसे छोटा तार 6 मीटर है। मध्य से 18 मीटर दूर सड़क पथ से जुड़े समर्थक (supporting) तार की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
4. एक मेहराव अर्द्ध दीर्घवृत्ताकार रूप का है। यह 8 मीटर चौड़ा और केन्द्र से 2 मीटर ऊँचा है। एक सिरे से 1.5 मीटर दूर बिन्दु पर मेहराव की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
5. एक 12 सेमी लम्बी छड़ इस प्रकार चलती है कि इसके सिरे निर्देशांक्षों को स्पर्श करते हैं। छड़ के बिन्दु P का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जो x–अक्ष के सम्पर्क वाले सिरे से 3 सेमी दूर है।
6. त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो परवलय $x^2 = 12y$ के शीर्ष को इसकी नाभिलम्ब जीवा के सिरों को मिलाने वाली रेखाओं से बना है।
7. एक व्यक्ति दौड़पथ पर दौड़ते हुऐ अंकित करता है कि उससे दो झण्डा चौकियों की दूरियों का योग सदैव 10 मीटर रहता है और झण्डा चौकियों के बीच की दूरी 8 मीटर है। व्यक्ति द्वारा बनाए पथ का समीकरण ज्ञात कीजिए।
8. परवलय $y^2 = 4ax$ के अन्तर्गत एक समबाहुत्रिभुज है जिसका एक शीर्ष परवलय का शीर्ष है। त्रिभुज की भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

ज्यामिति गणित की सबसे प्राचीन शाखाओं में से एक है। यूनान के ज्यामितिविदों ने अनेक वक्रों के गुणधर्मो का अन्वेषण किया जिनकी सैद्धान्तिक और व्यावहारिक महत्ता है। **यूक्लिड** ने लगभग 300 ई०पू० ज्यामिति पर अपना भाष्य लिखा। वह सर्वप्रथम व्यक्ति थे जिन्होनें भौतिक चिन्तन द्वारा सुझाए गए निश्चित अभिग्रहीतियों के आधार पर ज्यामितीय चित्रों को संगठित किया। ज्यामिति, जिसका प्रारम्भ भारतीयों और यूनानियों ने किया, उसके अध्ययन में उन्होनें बीजगणित की विधियों के अनुप्रयोग को आवश्यक नहीं बताया। ज्यामिति विषय की एकीकरण पहुँच जो यूक्लिड, ने दिया तथा जो सुल्वसूत्रों से प्राप्त थी इत्यादि ने दी, लगभग 1300 वर्षो तक चलती रही। 200 ई०पू० में **अपोलोनियस** ने एक पुस्तक ''दी कोनिक'' (शांकव) "The Conic" लिखी जो अनेक महत्वूपर्ण अन्वेषणों के साथ शंकु परिच्छेदों के बारे में थी और 18 शताब्दियों तक बेजोड़ रही।

रेन देकार्ते (1596 – 1650A.D.) के नाम पर आधुनिक वैश्लेषिक ज्यामिति को कार्तीय (Cartesian) कहा जाता है जिसकी सार्थकता 'ला ज्योमेट्री' (La Geometry) के नाम से 1637 ई० में प्रकाशित हुई। परन्तु वैश्लेषिक ज्यामिति के मूलभूत सिद्धान्त और विधियों को पहले ही **पियरे डि फर्मा** (Peirre de Farmat) (1601 – 1665 ई०) ने अन्वेषित कर लिया था। दुर्भाग्यवश, फर्मा का विषय पर भाष्य, *Ad Locus Planos et Solidos Isagose* (तल और ठोस बिन्दुपथ की भूमिका– Introduction to plane and solid loci) केवल उनकी मृत्यु के बाद 1679 ई० में प्रकाशित हुआ था। इसलिए देकार्ते की वैश्लेषिक ज्यामिति के अद्वितीय अन्वेषक का श्रेय मिला।

आईजक बैरो (Issac Barrow) ने कार्तीय विधियों के प्रयोग को तिरस्कृत किया। न्यूटन ने वक्रों के समीकरण ज्ञात करने के लिए अज्ञात गुणांकों की विधि का प्रयोग किया। उन्होनें अनेक प्रकार के निर्देशांकों, ध्रुवीय (Polar) और द्विध्रुवीय (bipolar) का प्रयेाग किया।

लैब्नीज (Leibnitz) ने 'भुज' (abcissa), कोटि (ordinate) और निर्देशांक पदों (Coordinate), का प्रयोग किया। ऐल. हास्पीटल (L. Hospital) (लगभग 1700 ई०)) ने वैश्लेषिक ज्यामिति पर एक महत्वपूर्ण पाठ्य पुस्तक लिखी।

क्लैरौट (Clairaut) (1729 ई०) ने सर्वप्रथम दूरी सूत्र को दिया यद्यपि यह शुद्ध रूप न था। उन्होनें रैखिक समीकरण का अन्तः खण्ड रूप भी दिया। **क्रेमर (Cramer)** (1750 ई०) ने औपचारिक रूप से दो निर्देशाक्षों को प्रयोग करके वृत्त का समीकरण $(y-a)^2+(b-x)^2=r.r$ द्वारा दिया। उन्होंने उस समय में वैश्लेषिक ज्यामिति का सर्वोत्तम प्रस्तुतीकरण दिया। **मोगे (Monge)** (1781 ई०) ने आधुनिक बिन्दु प्रवणता के रूप में रेखा का समीकरण निम्न प्रकार से दिया।

$$y-y'=a\,(x-x')$$

तथा दो रेखाओं के लम्बवत होने का प्रतिबन्ध $aa'+1=0$ दिया।

एस.एफ.लेक्रोइक्स (1765–1843 ई०) प्रसिद्ध पाठ्य पुस्तक लेखक थे, लेकिन उनका वैश्लेषिक ज्यामिति में योगदान यदाकदा मिलता है। उन्होनें रेखा के समीकरण का दो बिन्दु रूप

$$y-\beta=\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}\,(x-\alpha)$$

और (α,β) से $y=ax+b$ पर लम्ब की लम्बाई $\dfrac{(\beta-a\alpha-b)}{\sqrt{1+a^2}}$ बताया। उन्होनें दो रेखाओं के मध्यस्थ कोण का सूत्र $\tan\theta=\dfrac{a'-a}{1+aa'}$ भी दिया। यह वास्तव में आश्चर्यजनक है कि वैश्लेषिक ज्यामिति के अन्वेषण के बाद इन मूलभूत आवश्यक सूत्रों को ज्ञात करने के

लिए 150 वर्षों से अधिक इंतजार करना पड़ा। 1818 ई० में **सी. लेम,** एक सिविल इंजीनियर, ने दो बिन्दुपथों $E = 0$ $E' = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से जाने वाले वक्र $mE + m'E' = 0$ को बताया।

विज्ञान एवं गणित दोनों में अनेक महत्त्वपूर्ण अन्वेषण शंकु परिच्छेदों से संबंधित हैं। यूनानियों विशेषकर **आर्किमिडीज (Archimedes)** (287-212 ई० पू०) और **अपोलोनियस (Apollonius)** (200 ई० पू०) ने शंकु परिच्छेदों का अध्ययन इनकी अपनी सुन्दरता के लिए किया। आजकल ये वक्र महत्वपूर्ण उपक्रम हैं, जिससे बाह्य अंतरिक्ष और परमाणु कणों के व्यवहार से संबधित अन्वेषणों के द्वारा अनेक रहस्यों का उद्घाटन हुआ है।

त्रिकोणमिति (सतत्) (TRIGNOMETRY (contd.))

अध्याय 14

14.1 भूमिका

अध्याय 9 में हम त्रिकोणमितीय फलनों के गुणधर्मों और उनके आलेखों के विषय में अध्ययन कर चुकें हैं। इस अध्याय में हम त्रिकोणमितीय समीकरणों के हल त्रिभुजों के हल और प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के विषय में अध्ययन करेंगे।

14.2 त्रिकोणमितीय समीकरण

एक चर राशि में एक या अधिक त्रिकोणमितीय फलनों वाले समीकरण को त्रिकोणमितीय समीकरण कहते हैं। इस अनुभाग में हम ऐसे समीकरणों के हल ज्ञात करेंगे। हम जानते हैं कि त्रिकोणमितीय फलन आवर्ती फलन होते हैं। फलन $\sin x$ तथा $\cos x$ आवर्ती फलन हैं जिनका आर्वतकाल 2π है तथा $\tan x$ एक आवर्ती फलन है जिसका आर्वतकाल π है। इस प्रकार त्रिकोणमितीय समीकरणों के अनंत हल होंगें। किसी त्रिकोणमितीय समीकरण के ऐसे हल जो अंतराल $0 \leq x < 2\pi$ के लिए होते हैं उन्हें मुख्य हल कहतें हैं। पूर्णांक n से युक्त व्यंजक जो किसी त्रिकोणमितीय समीकरण के सभी हल को व्यक्त करता है उसे व्यापक हल कहते हैं। हम पूर्णांकों के समुच्चय को व्यक्त करने के लिए I का प्रयोग करेंगें।

त्रिकोणमितीय समीकरणों को हल करने में निम्नलिखित उदाहरण उपयोगी सिद्ध होंगें।

उदाहरण 1 समीकरण $\sin x = \frac{1}{2}$ के मुख्य हल ज्ञात कीजिए

हल हम जानते हैं कि $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ तथा $\sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$.

इसलिए अभीष्ट मुख्य हल $x = \frac{\pi}{6}$ तथा $\frac{5\pi}{6}$ हैं।

उदाहरण 2 समीकरण $\tan x = -\sqrt{3}$ के मुख्य हल ज्ञात कीजिए।

हल हम जानते हैं कि $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ इस प्रकार

$$\tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

तथा $$\tan\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

इसलिए $$\tan\frac{2\pi}{3} = \tan\frac{5\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

अतः मुख्य हल $\frac{2\pi}{3}$ तथा $\frac{5\pi}{3}$ हैं।.

अब हम त्रिकोणमितीय समीकरणों के ब्यापक हल ज्ञात करेंगे।

अध्याय 9 (भाग 1) में हम निम्नलिखित परिणामों को व्युत्पन्न कर चुके हैं।

$\sin\theta = 0$ अतः $\theta = n\pi$, जहाँ $n \in I$

$\cos\theta = 0$ अतः $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, जहाँ $n \in I$

$\tan\theta = 0$ अतः $\theta = n\pi$, जहाँ $n \in I$.

अब हम निम्न परिणामों को सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 1 किन्ही वास्तविक संख्याओं θ और α के लिए

$\sin\theta = \sin\alpha$ से $\theta = n\pi + (-1)^n\alpha$, जहाँ $n \in I$ प्राप्त होता है।

उपपत्ति यदि $\sin\theta = \sin\alpha$, तो

$$\sin\theta - \sin\alpha = 0$$

या $$2\cos\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0,$$

इससे $\cos\frac{\theta+\alpha}{2} = 0$ या $\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$ प्राप्त होते हैं।

इसलिए $\frac{\theta+\alpha}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ या $\frac{\theta-\alpha}{2} = n\pi$, जहाँ $n \in I$

अर्थात $\theta = (2n+1)\pi - \alpha$, या $\theta = 2n\pi + \alpha$, जहाँ $n \in I$.

अतः $\theta = (2n+1)\pi + (-1)^{2n+1}\alpha$ या $\theta = 2n\pi + (-1)^{2n}\alpha$, जहाँ $n \in I$.

अपर्युक्त दोनों परिणामों को सम्मिलित करने पर हम

$\theta = n\pi + (-1)^n\alpha$, जहाँ $n \in I$, पाते हैं

प्रमेय 2 किन्हीं वास्तविक संख्याओं θ और α के लिए

$\cos\theta = \cos\alpha$ से $\theta = 2n\pi \pm \alpha$, जहाँ $n \in I$, प्राप्त होता है।

उपपत्ति यदि $\cos\theta = \cos\alpha$, तब

$\cos\theta - \cos\alpha = 0$

अर्थात $-2\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$

इस प्रकार $\sin\frac{\theta+\alpha}{2} = 0$ या $\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$.

इसलिए $\frac{\theta+\alpha}{2} = n\pi$ या $\frac{\theta-\alpha}{2} = n\pi$, जहाँ $n \in I$

अर्थात $\theta = 2n\pi - \alpha$ या $\theta = 2n\pi + \alpha$.

अतः $\theta = 2n\pi \pm \alpha$, जहाँ $n \in I$.

प्रमेय 3 यदि θ और α, $\frac{\pi}{2}$ के विषम गुणज नही हैं तो

$\tan\theta = \tan\alpha$ से $\theta = n\pi + \alpha$, जहाँ $n \in I$, प्राप्त होता है।

उपपत्ति यदि $\tan\theta = \tan\alpha$, तब

$\tan\theta - \tan\alpha = 0$

या $\frac{\sin\theta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\theta}{\cos\theta\cos\alpha} = 0$,

या $\sin(\theta - \alpha) = 0$ (क्यों?)

इसलिए $\theta - \alpha = n\pi$, या $\theta = n\pi + \alpha$ जहाँ $n \in I$ है।

उदाहरण 3 $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ के हल ज्ञात कीजिए।

हल हमें ज्ञात है कि $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$

अतः $\theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{3}$, जहाँ $n \in I$ है।

टिप्पणी $\frac{\pi}{3}$, θ का एक ऐसा मान है जिसके संगत $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ है। θ का कोई भी अन्य मान लेकर समीकरण का हल दिया जा सकता है जिसके लिए $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ हो, सभी विधियों से प्राप्त हल एक ही होगें यद्यपि वे प्रत्यक्षतः विभिन्न दिखाई पड़ सकते हैं।

उदाहरण 4 $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ को हल कीजिए।

हल हमें ज्ञात है कि $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\cos\frac{\pi}{6} = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = \cos\frac{5\pi}{6}$.

इसलिए $\theta = 2n\pi \pm \frac{5\pi}{6}$, जहाँ $n \in I$.

उदाहरण 5 $\tan 2x = -\cot(x + \frac{\pi}{6})$ को हल कीजिए।

हल हमें ज्ञात है कि $\tan 2x = -\cot(x + \frac{\pi}{6}) = \tan(\frac{\pi}{2} + x + \frac{\pi}{6})$

$$= \tan(\frac{2\pi}{3} + x)$$

इस प्रकार $2x = n\pi + \frac{2\pi}{3} + x$, या $x = n\pi + \frac{2\pi}{3}$, जहाँ $n \in I$.

उदाहरण 6 $\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x = 0$ को हल कीजिए।

हल दिया गया समीकरण निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है।

$$\sin 6x + \sin 2x + \sin 4x = 0,$$

या $2\sin 4x \cos 2x + \sin 4x = 0$

या $\sin 4x\,(2\cos 2x + 1) = 0.$

इसलिए $\sin 4x = 0$ या $\cos 2x = -\frac{1}{2}$

अतः $\sin 4x = 0$ या $\cos 2x = \cos\frac{2\pi}{3}$

अतः $4x = n\pi$ या $2x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$, जहाँ $n \in I$

अर्थात् $x = \frac{n\pi}{4}$ या $x = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, जहाँ $n \in I$.

उदाहरण 7 $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$ को हल कीजिए।

हल दिया गया समीकरण निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है।

$2(1 - \sin^2 x) + 3\sin x = 0$, या $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$

या $(2\sin x + 1)(\sin x - 2) = 0.$

अत: $\sin x = -\frac{1}{2}$ या $\sin x = 2.$

परन्तु $\sin x = 2$ असम्भव है (क्यों?)

अत: $\sin x = -\frac{1}{2} = \sin\frac{7\pi}{6}$

इस प्रकार हल को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है।

$$x = n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}, \text{ जहाँ } n \in \text{I}.$$

sin θ और cos θ के रेखिक समीकरण

$a\cos\theta + b\sin\theta = c$ प्रकार के समीकरणों को हल करने के लिए हम प्रत्येक पक्ष को $\sqrt{a^2+b^2}$ से भाग देते हैं और उसे निम्नलिखित रूप में लिखते हैं।

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

मान लीजिए कि $\tan\alpha = \frac{b}{a}$

तब $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+\text{b}^2}}$

इसकी सहायता से हम पाते हैं, कि $\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

अर्थात $\cos(\theta-\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

यदि $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1$, हो तो इसका हल होगा, क्योंकि इस स्थिति में हम प्राप्त कर सकते हैं $(\theta-\alpha) = \beta$ (मान लीजिए), जहाँ $\cos\beta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

निम्नलिखित उदाहरण की सहायता से हम इस विधि को स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 8 $\cos\theta - \sin\theta = -1$ को हल कीजिए।

हल दोनों पक्षों को $\sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$ से भाग देने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

या $$\cos\frac{\pi}{4}\cos\theta - \sin\frac{\pi}{4}\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

या $$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{3\pi}{4}$$

अतः समीकरण के हल निम्न प्रकार दिए जा सकते हैं।

$$\theta + \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{3\pi}{4}, \text{ या } \theta = 2n\pi \pm \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}, n\in I.$$

प्रश्नावली 14.1

निम्नलिखित समीकरणों के मुख्य हल ज्ञात कीजिए।

1. $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

2. $\sec x = 2$

3. $\cot x = -\sqrt{3}$

4. $\operatorname{cosec} x = -2$

निम्नलिखित समीकरणों में से प्रत्येक का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

5. $\sec x = \sec (x + \pi)$

6. $\cos 4x = \cos 2x$

7. $\cos 3x + \cos x - 2\cos x = 0$

8. $\sin 2x + \cos x = 0$

9. $\sec^2 2x = 1 - \tan 2x$

10. $\sin x = \tan x$

11. $\sin 3x + \cos 2x = 0$

12. $\sin mx + \sin nx = 0$

13. $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$

14. $\tan^3 x - 3\tan x = 0$

15. $4\sin x\cos x + 2\sin x + 2\cos x + 1 = 0$

16. $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$

17. $\cos x + \sin x = 1$

18. $2\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1 + \sin x$

19. $\sec x - \tan x = \sqrt{3}$

14.3 त्रिभुजों का हल

अध्याय 9 में त्रिकोणमिति का परिचय कराते समय, हमने बताया था कि त्रिकोणमिति का प्रमुख उद्देश्य त्रिभुज की भुजाओं और कोणों का परिकलन करना था, जबकि उनमें से कुछ कोण और भुजाएँ ज्ञात हों।

त्रिभुज की तीन भुजाएँ तथा तीन कोंण ही त्रिभुज के भाग कहलाते हैं। हम ज्यामिति में अध्ययन कर चुके हैं त्रिभुज की रचना के लिए एक भुजा सहित कम से कम तीन भाग ज्ञात होनें चाहिए। इस प्रकार तीन भागों के ज्ञात होने पर हम त्रिभुज के अन्य तीन भाग ज्ञात कर सकते हैं। त्रिभुज के ज्ञात भागों की सहायता से अज्ञात भागों के परिकलन की विधि को त्रिभुज का हल कहते हैं।

इस उद्देश्य की पूर्ति के लिए हमें त्रिभुज की भुजाओं तथा कोणों को सम्बन्धित करने वाले कुछ सूत्रों की आवश्यकता है।

मान लीजिए कि ABC एक त्रिभुज है। कोण A से हमारा अभिप्राय उस कोण से है जो भुजाओं AB और AC के बीच स्थित है तथा जिसका मान 0° और 180° के मध्य है। कोण B तथा C भी उसी तरह परिभाषित हैं। शीर्षों C, A तथा B की सम्मुख भुजाओं को क्रमशः AB, BC तथा CA या c, a तथा b द्वारा व्यक्त किया जाता है (आकृति 14.1)।

आकृति 14.1

प्रमेय 4 किसी त्रिभुज की भुजाएँ अपने सम्मुख कोणों की ज्या (sine) के अनुक्रमानुपाती होती हैं। दूसरे शब्दों में किसी त्रिभुज ABC में

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

(इस सूत्र को sine–सूत्र या sine–नियम भी कहते हैं)

उपपत्ति मान लीजिए कि ABC आकृतियों 14.2 (i) और (ii) द्वारा प्रर्दशित कोई एक त्रिभुज है।

शीर्ष B से भुजा AC पर लम्ब h खीचा गया है जो सम्मुख भुजा से D पर मिलता है। आकृति (i) में AC पर लम्ब डालने के लिए उसे D तक बढ़ाया गया है। आकृति 14.2 (i) के

आकृति 14.2

समकोण त्रिभुज से हम पाते हैं कि

$$\sin A = \frac{h}{c} \text{ या } h = c \sin A \qquad (1)$$

तथा $$\sin (180° - C) = \frac{h}{a}, \text{ या } h = a \sin C \qquad (2)$$

समीकरण (1) तथा (2) से हम पाते हैं कि

$$c \sin A = a \sin C, \text{ या } \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \qquad (3)$$

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}. \qquad (4)$$

(3) तथा (4) को संयोजित करने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

आकृति 14.2 (ii) में ΔABC के लिए समीकरणों (3) तथा (4) को इसी प्रकार प्राप्त किया जाता है।

प्रमेय 5 यदि A, B, C किसी त्रिभुज के कोणों तथा a, b तथा c क्रमशः A, B, C के सम्मुख भुजाओं की लम्बाइयाँ हों, तब

$$a = b \cos C + c \cos B$$

$$b = c \cos A + a \cos C$$

$$c = a \cos B + b \cos A.$$

(इन्हें प्रक्षेप–सूत्र कहते हैं)

उपपत्ति ABC त्रिभुज है।

आकृति. 14.3

आकृति 14.3 (i) से हम पाते हैं कि

$$a = BC = BD + DC$$

परन्तु $\quad BD = c \cos B$ तथा $DC = b \cos C$

अतः $\quad a = c \cos B + b \cos C$

इसी प्रकार 14.3 (ii) के लिए भी उपपत्ति दी जा सकती है तथा इसी प्रकार अन्य परिणामों को भी सिद्ध कर सकते हैं।

प्रमेय 6 यदि A, B तथा C किसी त्रिभुज के कोंण और a, b तथा c क्रमशः उनके सम्मुख भुजाओं की लम्बाईयां हों, तब

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

(इन सूत्रों को cosine सूत्र या cosine नियम भी कहते हैं।)

उपपत्ति मान लीजिए त्रिभुज ABC आकृति 14.4. (i) तथा (ii) द्वारा व्यक्त है।

आकृति 14.4

आकृति 14.4 (ii) के संदर्भ में हम पाते हैं, कि

$$BC^2 = BD^2 + DC^2 = BD^2 + (AC - AD)^2$$
$$= BD^2 + AD^2 + AC^2 - 2\,AC.AD$$
$$= AB^2 + AC^2 - 2\,AC.AB \cos A,$$

या $$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos A$$

या $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं, कि

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

इसी प्रकार का समीकरण आकृति 14.4 (i) के लिए प्राप्त किए जा सकते हैं जिसमें कोण C अधिक कोण है।

त्रिभुजों के कोणों का ज्ञात करनें के लिए को साइन–नियमों का सुविधाजनक रूप निम्नलिखित है।

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

अब हम अर्ध–कोंण सूत्रों को सिद्ध करेंगें।

प्रमेय 7 किसी त्रिभुज ABC में यदि $a+b+c=2s$ हो, तो

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

$$\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}$$

$$\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}.$$

उपपत्ति हम जानते हैं कि $2\sin^2\frac{A}{2} = 1-\cos A$

कोसाइन–नियम का प्रयोग करने पर हम पाते हैं, कि

$$2\sin^2\frac{A}{2} = 1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$= \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}$$

$$= \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

$$= \frac{(a+b-c)(a+c-b)}{2bc}$$

चूँकि $a+b+c=2s$, अतः हम पाते हैं, कि

$$2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{(2s-2c)(2s-2b)}{2bc},$$

या
$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{4(s-c)(s-b)}{4bc}$$

क्योंकि $\frac{A}{2}$ न्यून कोण है अतः, $\sin\frac{A}{2}$ धनात्मक होगा। इस प्रकार

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

ठीक इसी प्रकार से हम $\sin\frac{B}{2}$ तथा $\sin\frac{C}{2}$ के सूत्रों को सिद्ध कर सकते हैं।

प्रमेय 8 किसी त्रिभुज ABC में यदि $a+b+c=2s$ हो, तो

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}$$

$$\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}.$$

उपपत्ति हम जानते हैं कि

$$2\cos^2\frac{A}{2} = 1+\cos A$$

$$= 1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$= \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

चूँकि $a+b+c=2s$ अतः हम पाते हैं,

$$2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{2s(2s-2a)}{2bc},$$

या $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$. (क्यों ?)

इसी प्रकार हम $\cos\frac{B}{2}$ तथा $\cos\frac{C}{2}$ के सूत्रों को सिद्ध कर सकते हैं।

प्रमेय 9 किसी त्रिभुज ABC में यदि $a + b + c = 2s$, तो

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$$

$$\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

उपपत्ति हम जानते हैं कि

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

तथा $$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

अतः $$\tan\frac{A}{2} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

इसी प्रकार हम $\tan\frac{B}{2}$ तथा $\tan\frac{C}{2}$ भी प्राप्त कर सकते हैं।

प्रमेय 10 किसी त्रिभुज ABC के क्षेत्रफल 'Δ' के लिए निम्नलिखित सूत्र हैं,

$$\Delta = \frac{1}{2}\, bc \sin A = \frac{1}{2}\, ca \sin B = \frac{1}{2}\, ab \sin C.$$

उपपत्ति हम जानते हैं कि त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल निम्नलिखित सूत्र से ज्ञात कर सकते हैं। (आकृति 14.5)

$$\Delta = \frac{1}{2} BC.AD = \frac{1}{2} BC.\ AB \sin B$$

इस प्रकार $\Delta = \frac{1}{2}\, ac \sin B = \frac{1}{2}\, ca \sin B$

इसी प्रकार हम अन्य सूत्रों को सिद्ध कर सकते हैं।

आकृति 14.5

उपप्रमेय 1 त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \text{ है।}$$

उपपत्ति हम जानते हैं कि

$$\Delta = \frac{1}{2}\, bc \sin A = \frac{1}{2} . 2\, bc \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} .$$

$\sin\frac{A}{2}$ तथा $\cos\frac{A}{2}$ के मानों को प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं कि

$$\Delta = bc \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \times \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} .$$

प्रमेय 11 त्रिभुज ABC में सिद्ध कीजिए

$$\tan \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2}$$

$$\tan \frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a} \cot \frac{B}{2}$$

$$\tan \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{C}{2}.$$

उपपत्ति साइन सूत्र से हम जानते हैं कि

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k \text{ (मान लीजिए).}$$

अतः $$\frac{b-c}{b+c} = \frac{k(\sin B - \sin C)}{k(\sin B + \sin C)}$$

$$= \frac{2\cos\frac{B+C}{2} \sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2} \cos\frac{B-C}{2}}$$

$$= \cot\frac{B+C}{2} \tan\frac{B-C}{2}$$

$$= \cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)\ \tan\frac{B-C}{2} = \frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\cot\frac{A}{2}}.$$

इसलिए

$$\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\ \cot\frac{A}{2}.$$

इसी प्रकार हम अन्य परिणामों को सिद्ध कर सकते हैं।

(इन्हें हम नेपियर एनालोजी भी कहते हैं)

उदाहरण 9 यदि त्रिभुज ABC में, $a = 25$, $b = 52$ तथा $c = 63$ तो $\cos A$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल ज्ञात है कि

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$= \frac{52^2+63^2-25^2}{2\times 52\times 63}$$

$$= \frac{2704+3969-625}{2\times 52\times 63}$$

अतः $\cos A = \frac{12}{13}$.

उदाहरण 10 यदि $a = 15$, $b = 36$, $c = 39$ तो $\tan\frac{A}{2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल प्रमेय 9 द्वारा ज्ञात है, कि

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

अब $2s = a + b + c = 15 + 36 + 39 = 90$

इसलिए $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(45-36)\quad(45-39)}{45\times(45-15)}} = \sqrt{\frac{9\times 6}{45\times 30}}$

अतः $\tan\frac{A}{2} = \frac{1}{5}$.

उदाहरण 11 त्रिभुज को हल कीजिए, जहाँ

$c = 3.4$ सेमी, $A = 25°, B = 85°$.

हल चूँकि $A + B + C = 180°$, इसलिए

$C = 180° - (25° + 85°) = 70°$.

अब $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

या $\frac{\sin 25°}{a} = \frac{\sin 85°}{b} = \frac{\sin 70°}{3.4}$

इसलिए $a = \frac{3.4 \sin 25°}{\sin 70°} = \frac{3.4 \times 0.4226}{0.9397} = 1.53$ सेमी

तथा $b = \frac{3.4 \sin 85°}{\sin 70°} = \frac{3.4 \times 0.9962}{0.9397} = 3.6$ सेमी

इस प्रकार $C = 80°, a = 1.53$ सेमी, $b = 3.6$ सेमी

उदाहरण 12 सिद्ध कीजिए कि किसी त्रिभुज ABC में

$$a \sin (B - C) + b \sin (C - A) + c \sin (A - B) = 0.$$

हल विचार कीजिए कि

$$a \sin (B - C) = a [\sin B \cos C - \cos B \sin C]$$

अब $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = k$ (माना).

इसलिए $\sin A = ak, \sin B = bk, \sin C = ck.$

इन मानों के प्रतिस्थापन तथा कोसाइन सूत्र के प्रयोग से हम पाते हैं कि

$$a \sin (B - C) = a [bk (\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}) - ck (\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac})]$$

$$= \frac{k}{2} (a^2 + b^2 - c^2 - a^2 - c^2 + b^2)$$

$$= k (b^2 - c^2).$$

इसी प्रकार $b \sin (C - A) = k (c^2 - a^2)$

तथा $\quad c \sin (A - B) = k (a^2 - b^2).$

अतः बायाँ पक्ष $= k (b^2 - c^2 + c^2 - a^2 + a^2 - b^2)$

$= 0 =$ दायाँ पक्ष

प्रश्नावली 14.2

यदि त्रिभुज ABC में $a = 18, b = 24, c = 30$ तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए

1. $\cos A, \cos B, \cos C$

2. $\tan \frac{A}{2}, \tan \frac{B}{2}, \tan \frac{C}{2}$

3. त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल

4. $\sin A, \sin B, \sin C$

किसी त्रिभुज ABC में सिद्ध कीजिए

5. $\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}}$

6. $\frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{C}{2}}$

7. $\sin \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{a} \cos \frac{A}{2}$

8. $a (b \cos C - c \cos B) = b^2 - c^2$

9. $a (\cos C - \cos B) = 2 (b - c) \cos^2 \frac{A}{2}$

10. $\frac{\sin (B - C)}{\sin (B + C)} = \frac{b^2 - c^2}{a^2}$

निम्नलिखित प्रत्येक त्रिभुज को हल कीजिए।

11. $a = 2, b = 1, c = \sqrt{3}$

12. $c = 72, A = 56°, B = 65°$

13. $a = 72, B = 108°, A = 25°$

14. $a = 3, b = 4, c = 6$

15. $a = \sqrt{3}+1, b = \sqrt{3}-1, C = 60°$ $\left[\tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}\right.$ का प्रयोग करने पर$\left.\right]$

16. त्रिभुज ABC में, यदि $a\cos A = b\cos B$, तो सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज या तो समद्विबाहु होगा या समकोण त्रिभुज होगा।

17. सिद्ध कीजिए कि किसी समान्तर चर्तुभुज में यदि a तथा b दो असमान्तर भुजाएँ हो तथा इन दो भुजाओं के बीच का कोण θ और d उस विकर्ण की लम्बाई हो जो भुजाओं a तथा b के उभयनिष्ठ शीर्ष से जाता हो तो

$$d^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta.$$

14.4 प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन

अध्याय 2 में हम पढ़ चुके हैं कि यदि $f: X \to Y$ एकैक तथा आच्छादन फलन हो, तब हम एक अद्वितीय फलन $g: Y \to X$ इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं कि $g(y) = x$ जहाँ $x \varepsilon X$ ताकि $y = f(x)$ हो। इस प्रकार g का प्रांत $= f$ का परिसर तथा g का परिसर $= f$ का प्रांत । इस प्रकार परिभाषित फलन g को फलन f का प्रतिलोम फलन कहते हैं तथा इसे f^{-1} से निरूपित करते हैं। हम निम्न संबंधों के बारे में भी पढ़ चुके हैं।

$$(f^{-1}of)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x\,,$$

तथा $$(fof^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y.$$

हम जानते हैं कि त्रिकोणमितीय फलन आवर्ती फलन हैं अतः वे सामान्यतः एकैक और आच्छादक नहीं हैं। इसलिए उनके प्रतिलोम फलनों का अस्तित्व नहीं है। परन्तु यदि उनके प्रांत पर प्रतिबन्ध रखें तब उन्हें हम एकैक अच्छादक बना सकते हैं।

हम जानते हैं कि x के सभी वास्तविक मानों के लिए $-1 \le \sin x \le 1$, अतः यदि फलन $\sin x$ को $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ तक ही सीमित रखें तब यह फलन एकैक और आच्छादक हो जाता है और इसके प्रतिबिंब $-1 \le y \le 1$ होते हैं। वस्तुतः $\sin x$ को अंतरालों $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{5\pi}{2}$, $-\frac{5\pi}{2} \le x \le -\frac{3\pi}{2}$ इत्यादि में से किसी एक मे सीमित कर दें तो यह एकैक और अच्छादक हो जाता है और इसका प्रतिबिंब $-1 \le y \le 1$ होता है। अतः हम साइन फलन के प्रतिलोम को इन प्रत्येक अंतरालों में परिभाषित कर सकते हैं। इस प्रकार $\sin^{-1}x$ ऐसा फलन है जिसका प्रांत $-1 \le x \le 1$ तथा परिसर $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ या $-\frac{5\pi}{2} \le y \le -\frac{3\pi}{2}$ आदि हैं। ऐसे प्रत्येक अंतराल के

ालन $\sin^{-1} x$ की एक शाखा प्राप्त करते हैं। $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ को मुख्य शाखा कहते हैं।
$\sin^{-1} x$ ऐसा फलन है जिसका प्रांत $[-1, 1]$ अर्थात $-1 \leq x \leq 1$ तथा परिसर $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
ा निम्न प्रकार लिखते हैं।

$\sin^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

प्रकार हम शेष पाँच त्रिकोणमितीय फलनों के मुख्य शाखा को परिभाषित कर सकते
ा त्रिकोणमितीय फलनों पर विचार करते समय हम केवल मुख्य शाखा तक ही सीमित
ालिखित सारणी में प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों तथा उनकी मुख्य शाखा को
या गया है।

	मुख्य शाखा	
	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$	जहाँ $-1 \leq x \leq 1$
:	$0 \leq y \leq \pi$	जहाँ $-1 \leq x \leq 1$
	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$	जहाँ $-\infty < x < \infty$
:	$0 \leq y < \frac{\pi}{2}$ और $\frac{\pi}{2} < y \leq \pi$	जहाँ $1 \leq x < \infty$ और जहाँ $-\infty < x \leq -1$
$^{1} x$	$-\frac{\pi}{2} \leq y < 0$ और $0 < y \leq \frac{\pi}{2}$	जहाँ $-\infty < x \leq -1$ और जहाँ $1 \leq x < \infty$
:	$0 < y < \pi$	जहाँ $-\infty < x < \infty$

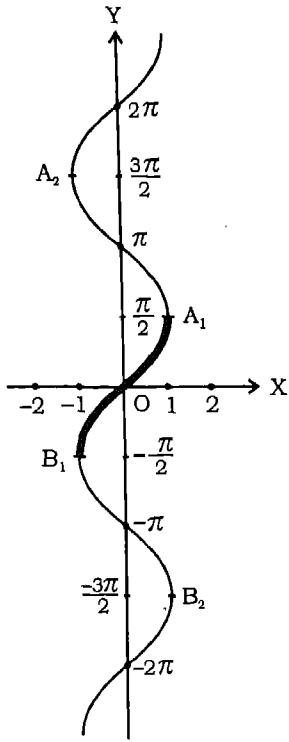
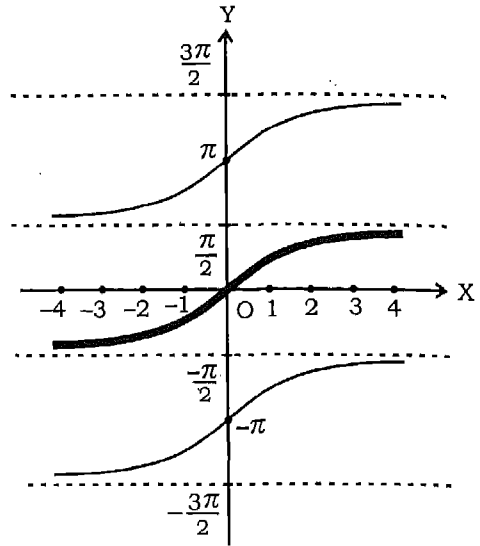
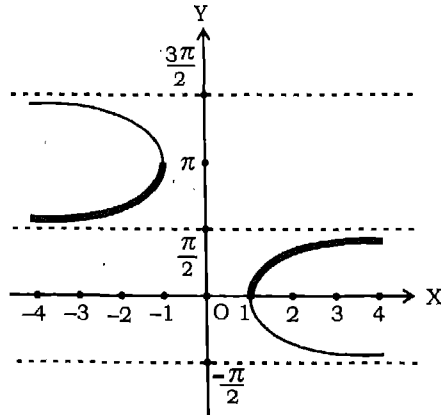
x को $(\sin x)^{-1}$ से जो $\frac{1}{\sin x}$ के बराबर है, भ्रमित नहीं होना चाहिए।

कहीं प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों की शाखा का उल्लेख नहीं है उसका अर्थ उस
ा की मुख्य शाखा से है।

त्रिकोणमितीय फलनों के आलेखों के ज्ञान की सहायता से प्रतिलोम त्रिकोणमितीय
आलेख खींचे जा सकते हैं। इन आलेखों को x तथा y अक्षों को परस्पर परिवर्तित
ा जा सकता है। $\sin^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ तथा $\sec^{-1} x$ के आलेख नीचे दिए गए हैं।

$y = \sin^{-1}x$

आकृति 14.6

$y = \tan^{-1}x$

आकृति 14.7

$y = \sec^{-1}x$

आकृति 14.8

अतः $\sin x = -\frac{1}{2}$ या $\sin x = 2.$

परन्तु $\sin x = 2$ असम्भव है (क्यों?)

अतः $\sin x = -\frac{1}{2} = \sin \frac{7\pi}{6}$

इस प्रकार हल को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है।

$$x = n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}, \text{ जहाँ } n \in \text{I}.$$

$\sin\theta$ और $\cos\theta$ के रेखिक समीकरण

$a \cos \theta + b \sin \theta = c$ प्रकार के समीकरणों को हल करने के लिए हम प्रत्येक पक्ष को $\sqrt{a^2+b^2}$ से भाग देते हैं और उसे निम्नलिखित रूप में लिखते हैं।

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

मान लीजिए कि $\tan \alpha = \frac{b}{a}$

तब $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \ \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+\text{b}^2}}$

इसकी सहायता से हम पाते हैं, कि $\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

अर्थात $\cos(\theta - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

यदि $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1$, हो तो इसका हल होगा, क्योंकि इस स्थिति में हम प्राप्त कर सकते हैं $(\theta - \alpha) = \beta$ (मान लीजिए), जहाँ $\cos\beta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

निम्नलिखित उदाहरण की सहायता से हम इस विधि को स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 8 $\cos\theta - \sin\theta = -1$ को हल कीजिए।

हल दोनों पक्षों को $\sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$ से भाग देने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

या $$\cos\frac{\pi}{4}\cos\theta - \sin\frac{\pi}{4}\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

या $$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{3\pi}{4}$$

अतः समीकरण के हल निम्न प्रकार दिए जा सकते हैं।

$$\theta + \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{3\pi}{4}, \text{ या } \theta = 2n\pi \pm \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}, n \in I.$$

प्रश्नावली 14.1

निम्नलिखित समीकरणों के मुख्य हल ज्ञात कीजिए।

1. $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

2. $\sec x = 2$

3. $\cot x = -\sqrt{3}$

4. $\text{cosec}\, x = -2$

निम्नलिखित समीकरणों में से प्रत्येक का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

5. $\sec x = \sec (x + \pi)$

6. $\cos 4x = \cos 2x$

7. $\cos 3x + \cos x - 2\cos x = 0$

8. $\sin 2x + \cos x = 0$

9. $\sec^2 2x = 1 - \tan 2x$

10. $\sin x = \tan x$

11. $\sin 3x + \cos 2x = 0$

12. $\sin mx + \sin nx = 0$

13. $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$

14. $\tan^3 x - 3\tan x = 0$

15. $4\sin x\cos x + 2\sin x + 2\cos x + 1 = 0$

16. $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$

17. $\cos x + \sin x = 1$

18. $2\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1 + \sin x$

19. $\sec x - \tan x = \sqrt{3}$

14.3 त्रिभुजों का हल

अध्याय 9 में त्रिकोणमिति का परिचय कराते समय, हमने बताया था कि त्रिकोणमिति का प्रमुख उद्देश्य त्रिभुज की भुजाओं और कोंणों का परिकलन करना था, जबकि उनमें से कुछ कोंण और भुजाएँ ज्ञात हों।

त्रिभुज की तीन भुजाएँ तथा तीन कोंण ही त्रिभुज के भाग कहलाते हैं। हम ज्यामिति में अध्ययन कर चुके हैं त्रिभुज की रचना के लिए एक भुजा सहित कम से कम तीन भाग ज्ञात होनें चाहिए। इस प्रकार तीन भागों के ज्ञात होने पर हम त्रिभुज के अन्य तीन भाग ज्ञात कर सकते हैं। त्रिभुज के ज्ञात भागों की सहायता से अज्ञात भागों के परिकलन की विधि को त्रिभुज का हल कहते हैं।

इस उद्देश्य की पूर्ति के लिए हमें त्रिभुज की भुजाओं तथा कोणों को सम्बन्धित करने वाले कुछ सूत्रों की आवश्यकता है।

मान लीजिए कि ABC एक त्रिभुज है। कोण A से हमारा अभिप्राय उस कोण से है जो भुजाओं AB और AC के बीच स्थित है तथा जिसका मान 0° और 180° के मध्य है। कोण B तथा C भी उसी तरह परिभाषित हैं। शीर्षों C, A तथा B की सम्मुख भुजाओं को क्रमशः AB, BC तथा CA या c, a तथा b द्वारा व्यक्त किया जाता है (आकृति 14.1)।

आकृति 14.1

प्रमेय 4 किसी त्रिभुज की भुजाएँ अपने सम्मुख कोणों की ज्या (sine) के अनुक्रमानुपाती होती हैं। दूसरे शब्दों में किसी त्रिभुज ABC में

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

(इस सूत्र को sine–सूत्र या sine–नियम भी कहते हैं)

उपपत्ति मान लीजिए कि ABC आकृतियों 14.2 (i) और (ii) द्वारा प्रर्दशित कोई एक त्रिभुज है।

शीर्ष B से भुजा AC पर लम्ब h खीचा गया है जो सम्मुख भुजा से D पर मिलता है। आकृति (i) में AC पर लम्ब डालने के लिए उसे D तक बढ़ाया गया है। आकृति 14.2 (i) के

आकृति 14.2

समकोंण त्रिभुज से हम पाते हैं कि

$$\sin A = \frac{h}{c} \text{ या } h = c \sin A \tag{1}$$

तथा $$\sin (180° - C) = \frac{h}{a}, \text{ या } h = a \sin C \tag{2}$$

समीकरण (1) तथा (2) से हम पाते हैं कि

$$c \sin A = a \sin C, \text{ या } \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \tag{3}$$

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}. \tag{4}$$

(3) तथा (4) को संयोजित करने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

आकृति 14.2 (ii) में ΔABC के लिए समीकरणों (3) तथा (4) को इसी प्रकार प्राप्त किया जाता है।

प्रमेय 5 यदि A, B, C किसी त्रिभुज के कोणों तथा a, b तथा c क्रमशः A, B, C के सम्मुख भुजाओं की लम्बाइयाँ हों, तब

$$a = b \cos C + c \cos B$$

$$b = c \cos A + a \cos C$$

$$c = a \cos B + b \cos A.$$

(इन्हें प्रक्षेप–सूत्र कहते हैं)

उपपत्ति ABC त्रिभुज है।

आकृति. 14.3

आकृति 14.3 (i) से हम पाते हैं कि

$$a = BC = BD + DC$$

परन्तु $\quad BD = c \cos B$ तथा $DC = b \cos C$

अतः $\quad a = c \cos B + b \cos C$

इसी प्रकार 14.3 (ii) के लिए भी उपपत्ति दी जा सकती है तथा इसी प्रकार अन्य परिणामों को भी सिद्ध कर सकते हैं।

प्रमेय 6 यदि A, B तथा C किसी त्रिभुज के कोंण और a, b तथा c क्रमशः उनके सम्मुख भुजाओं की लम्बाईयां हों, तब

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

(इन सूत्रों को cosine सूत्र या cosine नियम भी कहते हैं।)

उपपत्ति मान लीजिए त्रिभुज ABC आकृति 14.4. (i) तथा (ii) द्वारा व्यक्त है।

आकृति 14.4

आकृति 14.4 (ii) के संदर्भ में हम पाते हैं, कि

$$BC^2 = BD^2 + DC^2 = BD^2 + (AC - AD)^2$$

$$= BD^2 + AD^2 + AC^2 - 2\ AC.AD$$

$$= AB^2 + AC^2 - 2\ AC.AB \cos A,$$

या $\quad a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos A$

या $\quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं, कि

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

इसी प्रकार का समीकरण आकृति 14.4 (i) के लिए प्राप्त किए जा सकते हैं जिसमें कोण C अधिक कोण है।

त्रिभुजों के कोणों का ज्ञात करनें के लिए को साइन–नियमों का सुविधाजनक रूप निम्नलिखित है।

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

अब हम अर्ध–कोंण सूत्रों को सिद्ध करेंगें।

प्रमेय 7 किसी त्रिभुज ABC में यदि $a + b + c = 2s$ हो, तो

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

$$\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}$$

$$\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}.$$

उपपत्ति हम जानते हैं कि $2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A$

कोसाइन–नियम का प्रयोग करने पर हम पाते हैं, कि

$$2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc}$$

$$= \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc}$$

$$= \frac{(a+b-c)(a+c-b)}{2bc}$$

चूँकि $a + b + c = 2s$, अतः हम पाते हैं, कि

$$2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{(2s-2c)(2s-2b)}{2bc},$$

या $$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{4(s-c)(s-b)}{4bc}$$

क्योंकि $\frac{A}{2}$ न्यून कोण है अतः, $\sin\frac{A}{2}$ धनात्मक होगा। इस प्रकार

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

ठीक इसी प्रकार से हम $\sin\frac{B}{2}$ तथा $\sin\frac{C}{2}$ के सूत्रों को सिद्ध कर सकते हैं।

प्रमेय 8 किसी त्रिभुज ABC में यदि $a+b+c=2s$ हो, तो

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}$$

$$\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}.$$

उपपत्ति हम जानते हैं कि

$$\begin{aligned} 2\cos^2\frac{A}{2} &= 1+\cos A \\ &= 1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ &= \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ &= \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} \\ &= \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc} \end{aligned}$$

चूँकि $a+b+c=2s$ अतः हम पाते हैं,

$$2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{2s(2s-2a)}{2bc},$$

या $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$. (क्यों ?)

इसी प्रकार हम $\cos\frac{B}{2}$ तथा $\cos\frac{C}{2}$ के सूत्रों को सिद्ध कर सकते हैं।

प्रमेय 9 किसी त्रिभुज ABC में यदि $a+b+c=2s$, तो

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$$

$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

उपपत्ति हम जानते हैं कि

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

तथा $$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

अतः $$\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

इसी प्रकार हम $\tan\frac{B}{2}$ तथा $\tan\frac{C}{2}$ भी प्राप्त कर सकते हैं।

प्रमेय 10 किसी त्रिभुज ABC के क्षेत्रफल 'Δ' के लिए निम्नलिखित सूत्र हैं,

$$\Delta=\frac{1}{2}\,bc\sin A=\frac{1}{2}\,ca\sin B=\frac{1}{2}\,ab\sin C.$$

उपपत्ति हम जानते हैं कि त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल निम्नलिखित सूत्र से ज्ञात कर सकते हैं। (आकृति 14.5)

$$\Delta=\frac{1}{2}BC.AD=\frac{1}{2}BC.\ AB\sin B$$

इस प्रकार $\Delta=\frac{1}{2}\,ac\sin B=\frac{1}{2}\,ca\sin B$

इसी प्रकार हम अन्य सूत्रों को सिद्ध कर सकते हैं।

आकृति 14.5

उपप्रमेय 1 त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \text{ है।}$$

उपपत्ति हम जानते हैं कि

$$\Delta = \frac{1}{2}\, bc \sin A = \frac{1}{2} . 2\, bc \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}.$$

$\sin\frac{A}{2}$ तथा $\cos\frac{A}{2}$ के मानों को प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं कि

$$\Delta = bc\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \times \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,.$$

प्रमेय 11 त्रिभुज ABC में सिद्ध कीजिए

$$\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$

$$\tan\frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}$$

$$\tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}.$$

उपपत्ति साइन सूत्र से हम जानते हैं कि

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k \text{ (मान लीजिए).}$$

अतः
$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{k(\sin B - \sin C)}{k(\sin B + \sin C)}$$

$$= \frac{2\cos\frac{B+C}{2}\ \sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\ \cos\frac{B-C}{2}}$$

$$= \cot\frac{B+C}{2}\ \tan\frac{B-C}{2}$$

$$= \cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)\tan\frac{B-C}{2} = \frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\cot\frac{A}{2}}.$$

इसलिए

$$\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}.$$

इसी प्रकार हम अन्य परिणामों को सिद्ध कर सकते हैं।

(इन्हें हम नेपियर एनालोजी भी कहते हैं)

उदाहरण 9 यदि त्रिभुज ABC में, $a = 25, b = 52$ तथा $c = 63$ तो $\cos A$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल ज्ञात है कि

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$= \frac{52^2+63^2-25^2}{2\times 52\times 63}$$

$$= \frac{2704+3969-625}{2\times 52\times 63}$$

अतः $\cos A = \frac{12}{13}$.

उदाहरण 10 यदि $a = 15, b = 36, c = 39$ तो $\tan\frac{A}{2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल प्रमेय 9 द्वारा ज्ञात है, कि

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

अब $2s = a + b + c = 15 + 36 + 39 = 90$

इसलिए $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(45-36)\ (45-39)}{45\times(45-15)}} = \sqrt{\frac{9\times 6}{45\times 30}}$

अतः $\tan\frac{A}{2} = \frac{1}{5}$.

उदाहरण 11 त्रिभुज को हल कीजिए, जहाँ

$c = 3.4$ सेमी, $A = 25°, B = 85°$.

हल चूँकि $A + B + C = 180°$, इसलिए

$C = 180° - (25° + 85°) = 70°$.

अब $$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

या $$\frac{\sin 25°}{a} = \frac{\sin 85°}{b} = \frac{\sin 70°}{3.4}$$

इसलिए $$a = \frac{3.4 \sin 25°}{\sin 70°} = \frac{3.4 \times 0.4226}{0.9397} = 1.53 \text{ सेमी}$$

तथा $$b = \frac{3.4 \sin 85°}{\sin 70°} = \frac{3.4 \times 0.9962}{0.9397} = 3.6 \text{ सेमी}$$

इस प्रकार $C = 80°, a = 1.53$ सेमी, $b = 3.6$ सेमी

उदाहरण 12 सिद्ध कीजिए कि किसी त्रिभुज ABC में

$$a \sin (B - C) + b \sin (C - A) + c \sin (A - B) = 0.$$

हल विचार कीजिए कि

$$a \sin (B - C) = a [\sin B \cos C - \cos B \sin C]$$

अब $$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = k \text{ (माना)}.$$

इसलिए $\sin A = ak, \sin B = bk, \sin C = ck$.

इन मानों के प्रतिस्थापन तथा कोसाइन सूत्र के प्रयोग से हम पाते हैं कि

$$a \sin (B - C) = a [bk (\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}) - ck (\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac})]$$

$$= \frac{k}{2} (a^2 + b^2 - c^2 - a^2 - c^2 + b^2)$$

$$= k (b^2 - c^2).$$

इसी प्रकार $b \sin (C - A) = k (c^2 - a^2)$

तथा $\quad c \sin(A - B) = k(a^2 - b^2).$

अतः बायाँ पक्ष $= k(b^2 - c^2 + c^2 - a^2 + a^2 - b^2)$

$= 0 =$ दायाँ पक्ष

प्रश्नावली 14.2

यदि त्रिभुज ABC में $a = 18, b = 24, c = 30$ तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए

1. $\cos A, \cos B, \cos C$

2. $\tan \frac{A}{2}, \tan \frac{B}{2}, \tan \frac{C}{2}$

3. त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल

4. $\sin A, \sin B, \sin C$

किसी त्रिभुज ABC में सिद्ध कीजिए

5. $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}}$

6. $\dfrac{a-b}{c} = \dfrac{\sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{C}{2}}$

7. $\sin \dfrac{B-C}{2} = \dfrac{b-c}{a} \cos \dfrac{A}{2}$

8. $a(b \cos C - c \cos B) = b^2 - c^2$

9. $a(\cos C - \cos B) = 2(b - c)\cos^2 \dfrac{A}{2}$

10. $\dfrac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)} = \dfrac{b^2 - c^2}{a^2}$

निम्नलिखित प्रत्येक त्रिभुज को हल कीजिए।

11. $a = 2, b = 1, c = \sqrt{3}$

12. $c = 72, A = 56°, B = 65°$

13. $a = 72, B = 108°, A = 25°$

14. $a = 3, b = 4, c = 6$

15. $a = \sqrt{3}+1, b = \sqrt{3}-1, C = 60°$ $\left[\tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}\right.$ का प्रयोग करने पर$\left.\right]$

16. त्रिभुज ABC में, यदि $a\cos A = b\cos B$, तो सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज या तो समद्विबाहु होगा या समकोण त्रिभुज होगा।

17. सिद्ध कीजिए कि किसी समान्तर चर्तुभुज में यदि a तथा b दो असमान्तर भुजाएँ हो तथा इन दो भुजाओं के बीच का कोण θ और d उस विकर्ण की लम्बाई हो जो भुजाओं a तथा b के उभयनिष्ठ शीर्ष से जाता हो तो

$$d^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta.$$

14.4 प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन

अध्याय 2 में हम पढ़ चुके हैं कि यदि $f: X \to Y$ एकैक तथा आच्छादन फलन हो, तब हम एक अद्वितीय फलन $g: Y \to X$ इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं कि $g(y) = x$ जहाँ $x \in X$ ताकि $y = f(x)$ हो। इस प्रकार g का प्रांत $= f$ का परिसर तथा g का परिसर $= f$ का प्रांत । इस प्रकार परिभाषित फलन g को फलन f का प्रतिलोम फलन कहते हैं तथा इसे f^{-1} से निरूपित करते हैं। हम निम्न संबंधों के बारे में भी पढ़ चुके हैं।

$$(f^{-1}of)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x,$$

तथा $$(fof^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y.$$

हम जानते हैं कि त्रिकोणमितीय फलन आवर्ती फलन हैं अतः वे सामान्यतः एकैक और आच्छादक नहीं हैं। इसलिए उनके प्रतिलोम फलनों का अस्तित्व नहीं है। परन्तु यदि उनके प्रांत पर प्रतिबन्ध रखें तब उन्हें हम एकैक अच्छादक बना सकते हैं।

हम जानते हैं कि x के सभी वास्तविक मानों के लिए $-1 \le \sin x \le 1$, अतः यदि फलन $\sin x$ को $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ तक ही सीमित रखें तब यह फलन एकैक और आच्छादक हो जाता है और इसके प्रतिबिंब $-1 \le y \le 1$ होते हैं। वस्तुतः $\sin x$ को अंतरालों $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{5\pi}{2}$, $-\frac{5\pi}{2} \le x \le -\frac{3\pi}{2}$ इत्यादि में से किसी एक मे सीमित कर दें तो यह एकैक और अच्छादक हो जाता है और इसका प्रतिबिंब $-1 \le y \le 1$ होता है। अतः हम साइन फलन के प्रतिलोम को इन प्रत्येक अंतरालों में परिभाषित कर सकते हैं। इस प्रकार $\sin^{-1} x$ ऐसा फलन है जिसका प्रांत $-1 \le x \le 1$ तथा परिसर $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ या $-\frac{5\pi}{2} \le y \le -\frac{3\pi}{2}$ आदि हैं। ऐसे प्रत्येक अंतराल के

संगत हम फलन $\sin^{-1} x$ की एक शाखा प्राप्त करते हैं। $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ को मुख्य शाखा कहते हैं। इस प्रकार $\sin^{-1} x$ ऐसा फलन है जिसका प्रांत $[-1, 1]$ अर्थात $-1 \le x \le 1$ तथा परिसर $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ है। इसे हम निम्न प्रकार लिखते हैं।

$$\sin^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

इसी प्रकार हम शेष पाँच त्रिकोणमितीय फलनों के मुख्य शाखा को परिभाषित कर सकते हैं। प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों पर विचार करते समय हम केवल मुख्य शाखा तक ही सीमित रहेंगें। निम्नलिखित सारणी में प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों तथा उनकी मुख्य शाखा को प्रदर्शित किया गया है।

फलन	**मुख्य शाखा**	
$y = \sin^{-1} x$	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$	जहाँ $-1 \le x \le 1$
$y = \cos^{-1} x$	$0 \le y \le \pi$	जहाँ $-1 \le x \le 1$
$y = \tan^{-1} x$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$	जहाँ $-\infty < x < \infty$
$y = \sec^{-1} x$	$0 \le y < \frac{\pi}{2}$ और $\frac{\pi}{2} < y \le \pi$	जहाँ $1 \le x < \infty$ और जहाँ $-\infty < x \le -1$
$y = \text{cosec}^{-1} x$	$-\frac{\pi}{2} \le y < 0$ और $0 < y \le \frac{\pi}{2}$	जहाँ $-\infty < x \le -1$ और जहाँ $1 \le x < \infty$
$y = \cot^{-1} x$	$0 < y < \pi$	जहाँ $-\infty < x < \infty$

टिप्पणी

1. $\sin^{-1} x$ को $(\sin x)^{-1}$ से जो $\frac{1}{\sin x}$ के बराबर है, भ्रमित नहीं होना चाहिए।
2. जहाँ कहीं प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों की शाखा का उल्लेख नहीं है उसका अर्थ उस फलन की मुख्य शाखा से है।

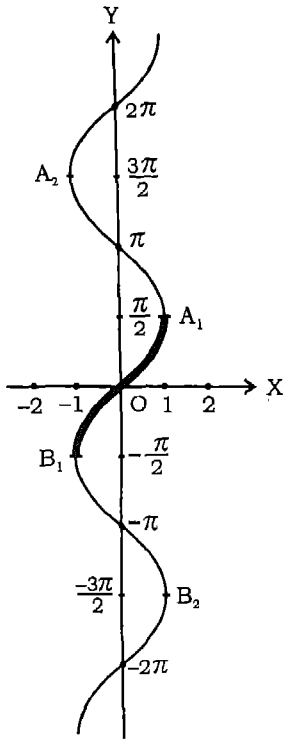
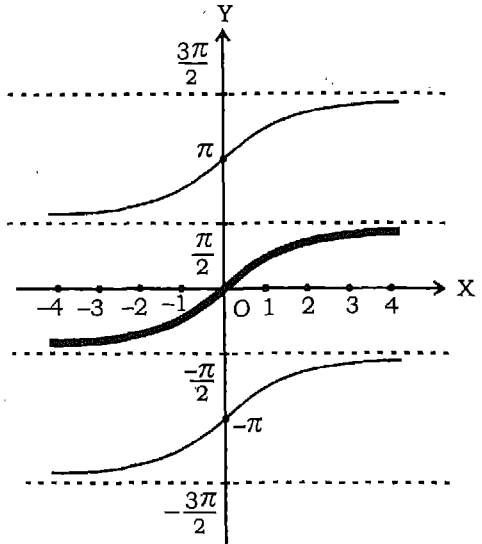
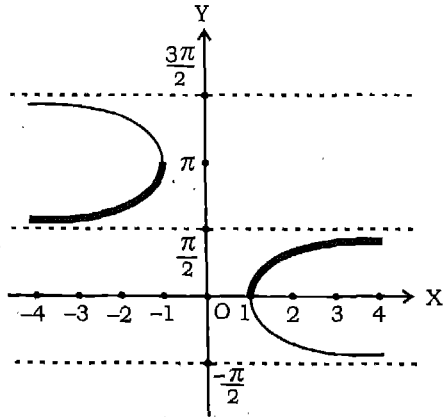
संगत त्रिकोणमितीय फलनों के आलेखों के ज्ञान की सहायता से प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के आलेख खींचे जा सकते हैं। इन आलेखों को x तथा y अक्षों को परस्पर परिवर्तित करके खींचा जा सकता है। $\sin^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ तथा $\sec^{-1} x$ के आलेख नीचे दिए गए हैं।

क्योंकि $\sin x$ तथा $\sin^{-1} x$ परस्पर प्रतिलोम फलन हैं अतः

$$\sin^{-1}(\sin x) = x \text{ तथा } \sin(\sin^{-1} x) = x.$$

$y = \sin^{-1}x$

आकृति 14.6

$y = \tan^{-1}x$

आकृति 14.7

$y = \sec^{-1}x$

आकृति 14.8

प्रतिलोम फलनों के गुणों के अनुसार यदि

$$x = \sin\theta \text{ तो } \theta = \sin^{-1} x$$

तथा यदि $\theta = \sin^{-1} x$ तो $x = \sin\theta$.

इसी प्रकार के अन्य परिणाम पाँचों प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के लिए भी सत्य हैं।

अब हम प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फ़लनों के कुछ अन्य प्रगुणों का अध्ययन करेंगे। यह ध्यान देने योग्य है कि ये परिणाम प्रतिलोम त्रिकोणमितीय के संगत उनके मुख्य मान शाखा के अंतर्गत ही सार्थक हैं जहाँ कहीं भी वे परिभाषित हैं।

प्रमेय 12 परिभाषित प्रान्त के अन्तर्गत सिद्ध कीजिए

(i) $\sin^{-1}\dfrac{1}{x} = \text{cosec}^{-1} x$

(ii) $\cos^{-1}\dfrac{1}{x} = \sec^{-1} x$

(iii) $\tan^{-1}\dfrac{1}{x} = \cot^{-1} x$.

उपपत्ति प्रथम परिणाम को सिद्ध करने के लिए हम $\text{cosec}^{-1} x = \theta$, अर्थात $x = \text{cosec}\,\theta$ रखते हैं। इस प्रकार

$$\frac{1}{x} = \sin\theta$$

इसलिए $\sin^{-1}\dfrac{1}{x} = \theta$

अतः $\sin^{-1}\dfrac{1}{x} = \text{cosec}^{-1} x$.

इसी प्रकार हम शेष दो परिणामों को सिद्ध कर सकते हैं।

प्रमेय 13 परिभाषित प्रान्त के अन्तर्गत सिद्ध कीजिए

(i) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$

(ii) $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$

(iii) $\text{cosec}^{-1}(-x) = -\text{cosec}^{-1} x$.

उपपत्ति मान लीजिए कि $\sin^{-1}(-x) = \theta$, या $-x = \sin\theta$ इस प्रकार

$$x = -\sin\theta, \text{ या } x = \sin(-\theta).$$

अतः $\sin^{-1} x = -\theta = -\sin^{-1} x.$

इसी प्रकार हम अन्य परिणामों को सिद्ध कर सकते हैं।

प्रमेय 14 परिभाषित प्रान्त के अन्तर्गत सिद्ध कीजिए

(i) $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$

(ii) $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$

(iii) $\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1} x.$

उपपत्ति मान लीजिए कि $\cos^{-1}(-x) = \theta$, या $-x = \cos\theta$

इस प्रकार $x = -\cos\theta = \cos(\pi - \theta)$, या $\cos^{-1} x = \pi - \theta = \pi - \cos^{-1}(-x)$

अतः $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x.$

इसी प्रकार हम अन्य परिणामों को सिद्ध कर सकते हैं।

प्रमेय 15 परिभाषित प्रान्त के अन्तर्गत निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए

(i) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

(ii) $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

(iii) $\text{cosec}^{-1} x + \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

उपपत्ति मान लीजिए कि $\sin^{-1} x = \theta.$

तब $x = \sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right).$

इसलिए $\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x.$

अतः $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}.$

इसी प्रकार अन्य परिणाम सिद्ध किए जा सकते हैं।

प्रमेय 16 परिभाषित प्रान्त के अन्तर्गत निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए

(i) $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy}$, यदि $xy < 1.$

(ii) $\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1} \dfrac{x-y}{1+xy}$, यदि $xy > -1$.

(iii) $2 \tan^{-1} x = \tan^{-1} \dfrac{2x}{1-x^2}$, यदि $|x| < 1$.

उपपत्ति (i) मान लीजिए कि $\tan^{-1} x = \theta$, $\tan^{-1} y = \phi$. तब $x = \tan \theta$, $y = \tan \phi$. इसलिए

$$\tan (\theta + \phi) = \frac{\tan \theta + \tan \phi}{1 - \tan \theta \tan \phi} = \frac{x+y}{1-xy},$$

जिससे $\theta + \phi = \tan^{-1} \dfrac{x+y}{1-xy}$ प्राप्त होता है।

अतः $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \dfrac{x+y}{1-xy}$.

यह दर्शाया जा सकता है कि उपर्युक्त परिणाम केवल तभी सत्य है, जब $xy < 1$ हो। यद्यपि इसकी उपपत्ति इस पुस्तक के क्षेत्र के बाहर है। यदि हम y के स्थान पर $-y$ रखें तो द्वितीय परिणाम पाते हैं तथा y के स्थान पर x रखने पर तीसरा परिणाम प्राप्त होता है।

प्रमेय 17 परिभाषित प्रान्त के अन्तर्गत सिद्ध कीजिए कि

$$2 \tan^{-1} x = \sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2} = \cos^{-1} \frac{1-x^2}{1+x^2}, \text{ यदि } |x| < 1.$$

उपपत्ति मान लीजिए कि $x = \tan \theta$. तब

$$\begin{aligned} \sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2} &= \sin^{-1} \frac{2 \tan \theta}{1+\tan^2 \theta} \\ &= \sin^{-1} (\sin 2\theta) \\ &= 2\theta = 2 \tan^{-1} x. \qquad (1) \end{aligned}$$

पुनः

$$\begin{aligned} \cos^{-1} \frac{1-x^2}{1+x^2} &= \cos^{-1} \frac{1-\tan^2 \theta}{1+\tan^2 \theta} \\ &= \cos^{-1} (\cos 2\theta) \\ &= 2\theta = 2 \tan^{-1} x. \qquad (2) \end{aligned}$$

(1) तथा (2) से हम पाते कि

$$2 \tan^{-1} x = \sin^{-1} \frac{2x}{1-x^2} = \cos^{-1} \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

यह दिखाया जा सकता है कि उपर्युक्त परिणाम केवल तभी सत्य है जब $|x| < 1$ हो यद्यपि यह इस पुस्तक के क्षेत्र के बाहर है।

उदाहरण 13 सिद्ध कीजिए कि $2 \sin^{-1} x = \sin^{-1} (2x\sqrt{1-x^2})$

उपपत्ति मान लीजिए कि $x = \sin\theta$. तब $\sin^{-1} x = \theta$. अब

$$\text{दायाँ पक्ष} = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$$
$$= \sin^{-1}(2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta})$$
$$= \sin^{-1}(2\sin\theta\cos\theta)$$
$$= \sin^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta = 2\sin^{-1}x = \text{बायाँ पक्ष}$$

उदाहरण 14 सिद्ध कीजिए कि $\tan^{-1}\frac{2}{11} + \tan^{-1}\frac{7}{24} = \tan^{-1}\frac{1}{2}$.

उपपत्ति प्रमेय 16 (i) के अनुसार, हम पाते हैं

$$\text{बायाँ पक्ष} = \tan^{-1}\frac{2}{11} + \tan^{-1}\frac{7}{24}$$
$$= \tan^{-1}\frac{\frac{2}{11}+\frac{7}{24}}{1-\frac{2}{11}\times\frac{7}{24}}$$
$$= \tan^{-1}\frac{125}{250} = \tan^{-1}\frac{1}{2} = \text{दायाँ पक्ष}$$

उदाहरण 15 $\cot^{-1}(-\sqrt{3})$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $\cot^{-1}(-\sqrt{3}) = \theta$.

तब $\cot\theta = -\sqrt{3} = -\cot\frac{\pi}{6}$

क्योंकि $\cot^{-1} x$ की मुख्य शाखा $0 < \theta < \pi$ है, इसलिए हम θ का ऐसा मान ज्ञात करना चाहते हैं जिसके लिए $0 < \theta < \pi$ हो। अब

$$\cot\theta = -\cot\frac{\pi}{6} = \cot\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cot\frac{5\pi}{6}.$$

अतः $\cot^{-1}(-\sqrt{3})$ का प्रमुख मान $\frac{5\pi}{6}$ है।

उदाहरण 16 निम्नलिखित फलनों को उनके सरलतम रूप में लिखिए।

(i) $\tan^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ (ii) $\tan^{-1} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

हल (i) माना कि $x = \sec\theta$. तब $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\sec^2\theta - 1} = \tan\theta$.

इसलिए
$$\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\tan\theta}\right) = \tan^{-1}(\cot\theta)$$
$$= \tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$$
$$= \frac{\pi}{2}-\theta = \frac{\pi}{2} - \sec^{-1}x.$$

यह दिए फलन का सरलतम रूप है।

(ii) माना कि $x = \tan\theta$

तब
$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sec\theta - 1}{\tan\theta}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$
$$= \tan^{-1}\left(\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\right)$$
$$= \tan^{-1}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}x,$$

यह दिए फलन का सरलतम रूप है।

उदाहरण 17 $\tan^{-1}\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$ को सरलतम रूप में लिखिए

हल हम जानते हैं कि

$$\tan^{-1}\frac{\cos x}{1+\sin x} = \tan^{-1}\left(\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})\ (\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})}{(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})^2}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1-\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{4}-\frac{x}{2},$$

जो दिए गए फलन का वाँछित सरलतम रूप है।

उदाहरण 18 $\tan^{-1}2x + \tan^{-1}3x = \frac{\pi}{4}$ को हल कीजिए।

हल प्रमेय 16 (i), के अनुसार हम पाते हैं कि

बायाँ पक्ष $= \tan^{-1}\left(\frac{2x+3x}{1-2x\times 3x}\right) = \frac{\pi}{4}$

या $\tan^{-1}\left(\frac{5x}{1-6x^2}\right) = \frac{\pi}{4}$, जबकि $6x^2 < 1$

या $\frac{5x}{1-6x^2} = \tan\frac{\pi}{4} = 1$.

इसलिए $6x^2 + 5x - 1 = 0$, या $(6x-1)(x+1) = 0$,

जिससे $x = \frac{1}{6}$ अथवा $x = -1$ प्राप्त होता है।

परन्तु $x = -1$ समीकरण को संतुष्ट नही करता है क्योंकि समीकरण का बायाँ पक्ष ऋणात्मक हो जाता है। अतः $x = \frac{1}{6}$ अभीष्ट हल है।

प्रश्नावली 14.3

निम्नलिखित के मुख्य मान ज्ञात कीजिए।

1. $\sin^{-1}(-\frac{1}{2})$

2. $\cos^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})$

3. $\text{cosec}^{-1}(2)$

4. $\tan^{-1}(\sqrt{3})$

5. $\cos^{-1}(-\frac{1}{2})$

6. $\tan^{-1}(-1)$

निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए।

7. $3\sin^{-1}x = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$

8. $3\cos^{-1}x = \cos^{-1}(4x^3 - 3x)$

9. $\tan^{-1}x + \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} = \tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2},\ x^2 < \frac{1}{3}$

10. $2\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{7} = \tan^{-1}\frac{31}{17}$

निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए।

11. $\cot(\tan^{-1}a + \cot^{-1}a)$

12. $\sin(\sin^{-1}x + \cos^{-1}x)$

13. $\tan\left[\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{1-x^2} + \cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}\right]$

निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए।

14. $2\tan^{-1}(\cos x) = \tan^{-1}(2\,\text{cosec}\,x)$

15. $\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{2}\tan^{-1}x, (x > 0)$

निम्नलिखित फलनों को सरलतम रूप में लिखिए।

16. $\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

17. $\tan^{-1}\left(\frac{3a^2x - x^3}{a^3 - 3ax^2}\right)$

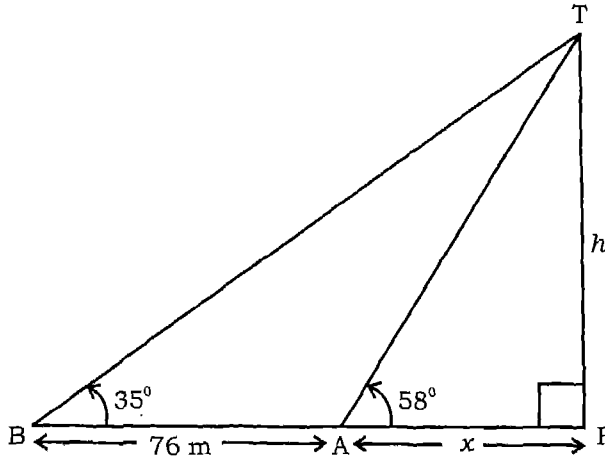
18. $\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)$

19. $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right)$

14.5 अनुप्रयोग

पिछली कक्षाओं में हमने उँचाई और दूरी के सरल प्रश्नों को हल करना सीखा है। इस अनुभाग में हम इस प्रकार के कुछ अन्य उदाहरणों को देते हैं।

उदाहरण 19 एक ऊर्ध्वाधर मीनार के पाद से जाने वाले क्षैतिज तल पर स्थित एक बिन्दु A से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 58° है। मीनार का पाद तथा बिन्दु A से जाने वाली क्षैतिज रेखा पर उससे 76 मीटर अधिक की दूरी पर आगे स्थित बिन्दु B से उसका मान 35° है। मीनार की उँचाई तथा A से उसके पाद की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि मीनार पाद तथा शिखर क्रमशः F तथा T द्वारा व्यक्त होते हैं (आकृति 14.9)। मान लीजिए कि मीनार की ऊचाई h मी. तथा मीनार के पाद से A की दूरी x मी है।

आकृति 14.9

समकोण त्रिभुजों AFT और BFT से हम पाते हैं कि

$$\frac{h}{x} = \tan 58° \quad (1)$$

तथा

$$\frac{h}{x+76} = \tan 35° \quad (2)$$

(1) तथा (2) से h का विलोपन करने पर

$$\frac{x \tan 58°}{x+76} = \tan 35°$$

या $$x = \frac{76 \tan 35^\circ}{\tan 58^\circ - \tan 35^\circ}$$

$$= \frac{76 \times 0.7002}{1.600 - 0.7002}$$

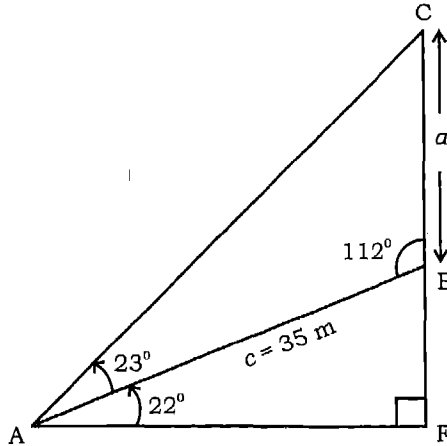
$$= \frac{53.2152}{0.8998}$$

= 59 मी (लगभग)

और $h = x \tan 58^\circ = 59\ (1.6) = 94.4$ मी (लगभग)

इसलिए मीनार की ऊचाई 94.4 मीटर तथा A की मीनार के पाद से दूरी 59 मीटर है।

उदाहरण 20 एक पेड़ एक पहाड़ी पर उर्ध्वाधरतः खड़ा है। पहाड़ी क्षैतिज रेखा से 22° के कोण पर झुकी हुई है। पेड़ के पाद से 35 मीटर पहाड़ी के ढाल के अनुदिश नीचे की ओर स्थित बिंदु से पेड़ के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। वृक्ष की उँचाई ज्ञात कीजिए।

हल मान लिजिए कि वृक्ष BC द्वारा निरूपित है। पहाड़ी के ढ़ाल के अनुदिश पेड़ के पाद से 35 मीटर सीधे नीचे की ओर स्थित बिन्दु A, तथा वृक्ष की ऊचाई a मीटर है (आकृति 14.10)।

आकृति 14.10

त्रिभुज ABC से हम प्राप्त करते हैं

$$\angle BAC = 45^\circ - 22^\circ = 23^\circ$$

$$\angle ABC = 90^\circ + 22^\circ = 112^\circ$$

$\angle ACB = 180° - (112° + 23°) = 45°$

तथा $c = 35$ मी

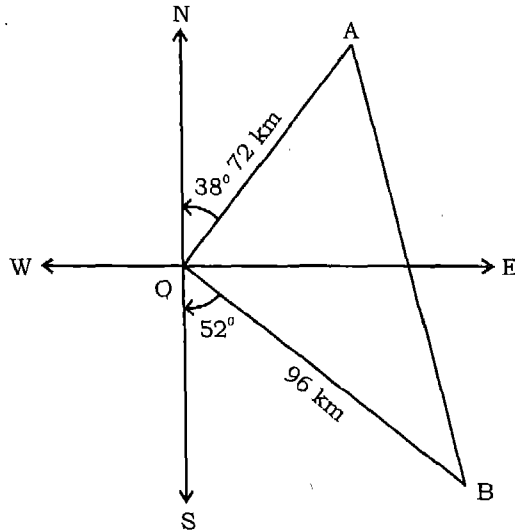
साइन सूत्र के प्रयोग से

$$\frac{a}{\sin 23°} = \frac{c}{\sin 45°}$$

या $a = \dfrac{35 \sin 23°}{\sin 45°} = 35 \times 0.391 \times 1.414 = 19.4$ मी

अतः पेड़ की ऊँचाई 19.4 मी है।

उदाहरण 21 दो जहाज एक बन्दरगाह से साथ–साथ रवाना होते हैं। एक 24 किमी प्रति घंटा की चाल से उ. 38° पू. दिशा में, तथा दूसरा 32 किमी प्रति घंटा की चाल से द. 52° पू. दिशा में जाते हैं। 3 घंटे पश्चात जहाजों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल आकृति 14.11 में हम देखते हैं कि $\angle AOB = 90°$

आकृति 14.11

अब $AB^2 = OA^2 + OB^2 = 72^2 + 96^2 = 14400$

इसलिए $AB = 120.$

अतः जहाजों के बीच की दूरी 120 किमी है।

प्रश्नावली 14.4

1. एक हवाई जहाज एक पुल के एक सिरे के ठीक ऊपर 1500 मी. की ऊँचाई पर है। हवाई जहाज से पुल के दूसरे सिरे का उन्नयन कोण $56°40'$ है। पुल की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

2. एक पानी के जहाज से पहाड़ी की चोटी पर स्थित बिन्दु A का उन्नयन कोण $19°$ है। चोटी के पाद की ओर 800 मीटर सीधे चलने के पश्चात बिन्दू A का उन्नयन कोण $44°$ हो जाता है। चोटी की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

3. 50 मीटर चौड़े राज़मार्ग के दोनों किनारों पर समान ऊँचाई के दीप स्तम्भ ऊर्ध्वाधर खड़े हैं। दीप–स्तम्भों के मध्य राजमार्ग के बिन्दु पर दीप–स्तम्भों के शिखरों के उन्नयन कोण $60°$ तथा $30°$ हैं। प्रत्येक दीप–स्तम्भ की ऊँचाई तथा प्रेक्षण बिन्दु की स्थिति ज्ञात कीजिए।

4. ऊर्ध्व दीप गृह के शिखर पर स्थित एक व्यक्ति देखता है कि सीधे उसकी ओर एक नाव आ रही है। यदि उसके अवनमन कोण को $30°$ से $60°$ तक परिवर्तन होनें में 10 मिनट का समय लगता हो तो ज्ञात कीजिए कि कितने समय पश्चात वह दीप गृह तक आ जायेगा।

5. एक ऊर्ध्व मीनार क्षैतिज समतल पर खड़ी है तथा उसके शिखर पर h मीटर ऊँचा ध्वज ऊर्ध्वाधर स्थित में है। क्षैतिज समतल पर स्थित एक बिन्दु से ध्वज के पाद और शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः α तथा β हैं। सिद्ध कीजिए कि मीनार की ऊँचाई $\dfrac{h\tan\alpha}{\tan\beta-\tan\alpha}$ है।

6. यदि एक ऊर्ध्व मीनार के जड़ से a तथा b दूरियों $(a>b)$ पर एक सरल रेखा पर स्थित दो बिन्दुओं से मीनार के शिखर के उन्नयन कोण परस्पर कोटि पूरक हैं तो सिद्ध कीजिए कि मीनार की ऊँचाई $\sqrt{(ab)}$ है। पुनः यदि उन बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा मीनार के शिखर पर कोंण θ अन्तरित करती हो तो $\sin\theta=\dfrac{a-b}{a+b}$ है।

7. दो नावें एक ही स्थान से एक साथ रवाना होती हैं। एक ऊ. $50°$ पू. दिशा में 56 किमी तथा दूसरी द. $80°$ पू. दिशा में 48 किमी जाती है। नावों की नवीन स्थितियों के मध्य दूरी ज्ञात कीजिए।

8. एक पहाड़ी की ढ़ाल पर स्थित 5 मीटर ऊँचा ऊर्ध्व स्तम्भ पहाड़ी की ढ़ाल के अनुदिश 7 मीटर लम्बी परछाई बनाता है। परछाई के अन्तिम सिरे पर स्तम्भ द्वारा अन्तरित कोण $35°$ है। सूर्य का उन्नयनकोण तथा क्षैतिज से पहाड़ी के ढ़ाल द्वारा बनाया गया कोण ज्ञात कीजिए।

9. दो वृक्ष A तथा B एक नदी के एक ही किनारे पर स्थित हैं। नदी में स्थित एक बिन्दु C से वृक्षों A तथा B की दूरियाँ क्रमशः 250 मीटर तथा 300 मीटर हैं। यदि कोण C का माप $45°$ हो तो वृक्षों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए ($\sqrt{2}=1.414$ का प्रयोग करें)।

10. एक समान्तर चर्तुभुज की बड़ी भुजा 10 सेमी तथा छोटी भुजा 6 से.मी. माप की है। यदि बड़ा विकर्ण बड़ा भुजा के साथ $30°$ का कोण बनाता हो तो बड़े विकर्ण की माप ज्ञात कीजिए।

11. एक मीनार का बिन्दु A पर उन्नयन कोण $\tan^{-1}\frac{5}{12}$ है। मीनार के जड़ की ओर 240 मीटर चलने के पश्चात मीनार का उन्नयन कोंण $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ हो जाता है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

विविध उदाहरण

उदाहरण 22 समीकरण $2\tan\theta - \cot\theta + 1 = 0$ को हल कीजिए।

हल दिए गए समीकरण को हम निम्न प्रकार लिख सकते हैं।

$$2\tan\theta - \frac{1}{\tan\theta} + 1 = 0, \text{ या } 2\tan^2\theta + \tan\theta - 1 = 0,$$

या $\quad (\tan\theta + 1)(2\tan\theta - 1) = 0.$

इसलिए $\quad \tan\theta = -1$ या $\tan\theta = \frac{1}{2}$

अर्थात $\quad \tan\theta = \tan\frac{3\pi}{4}$ या $\tan\theta = \tan^{-1}(\tan\frac{1}{2})$

अत: $\quad \theta = n\pi + \frac{3\pi}{4}$ या $\theta = m\pi + \tan^{-1}\frac{1}{2}$, m, n पूर्णांक हैं

उदाहरण 23 किसी त्रिभुज ABC में, सिद्ध कीजिए कि

$$(b + c)\cos\frac{B+C}{2} = a\cos\frac{B-C}{2}.$$

हल हम जानते हैं कि

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k,$$

या $\quad a = k\sin A, b = k\sin B, c = k\sin C.$

इसलिए
$$\frac{b+c}{a} = \frac{k(\sin B + \sin C)}{k\sin A}$$

$$= \frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right)\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B+C}{2}\right)\cos\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

अत: $(b+c)\cos\frac{B+C}{2} = a\cos\frac{B-C}{2}$.

उदाहरण 24 किसी त्रिभुज ABC में सिद्ध कीजिए कि

$$a\cos A + b\cos B + c\cos C = 2a\sin B\sin C.$$

हल साइन सूत्र द्वारा

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k,$$

या $a = k\sin A,\ b = k\sin B,\ c = k\sin C.$

इसलिए $a\cos A + b\cos B + c\cos C$

$$= k\sin A\cos A + k\sin B\cos B + k\sin C\cos C$$

$$= \frac{k}{2}[2\sin A\cos A + 2\sin B\cos B + 2\sin C\cos C]$$

$$= \frac{k}{2}[\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C]$$

$$= \frac{k}{2}[2\sin(A+B)\cos(A-B) + \sin 2C]$$

$$= \frac{k}{2}[2\sin(\pi - C)\cos(A-B) + \sin 2C]$$

$$= \frac{k}{2}[2\sin C\cos(A-B) + 2\sin C\cos C]$$

$$= k\sin C[\cos(A-B) + \cos(\pi - (A+B))]$$

$$= k\sin C[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

$$= k\sin C[-2\sin A\sin(-B)]$$

$$= 2k\sin A\sin B\sin C$$

$$= 2a\sin B\sin C \text{ (क्योंकि } k\sin A = a)$$

इस प्रकार परिणाम सिद्ध हो गया।

उदाहरण 25 किसी त्रिभुज ABC में सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}.$$

हल ज्ञात है कि

$$\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c}$$

$$= \frac{b^2+c^2-a^2}{2abc} + \frac{c^2+a^2-b^2}{2abc} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2abc}$$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

इस प्रकार परिणाम सिद्ध हो गया।

उदाहरण 26 यदि $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \pi$ सिद्ध कीजिए कि $x + y + z = xyz$.

हल माना $A = \tan^{-1} x, B = \tan^{-1} y, C = \tan^{-1} z$.

तब $x = \tan A, y = \tan B, z = \tan C$.

परन्तु $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \pi$, या $A + B + C = \pi$

इससे प्राप्त होता है कि $\tan (A + B) = \tan (\pi - C)$,

या $$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C$$

इसलिए $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$.

अतः $x + y + z = xyz$.

अध्याय 14 पर विविध प्रश्नावली

निम्नलिखित त्रिकोणमितीय समीकरणों को हल कीजिए।

1. $\sin x \tan x - 1 = \tan x - \sin x$.
2. $4 \cos x - 3 \sec x = \tan x$.
3. $\cot x + \tan x = 2 \operatorname{cosec} x$.
4. $\tan x + \tan 2x + \sqrt{3} \tan x \tan 2x = \sqrt{3}$.

त्रिभुज ABC में सिद्ध कीजिए कि:

5. $(b^2 - c^2) \cot A + (c^2 - a^2) \cot B + (a^2 - b^2) \cot C = 0.$

6. $a (\sin B - \sin C) + b (\sin C - \sin A) + c (\sin A - \sin B) = 0.$

7. $\frac{b^2 - c^2}{a^2} \sin 2A + \frac{c^2 - a^2}{b^2} \sin 2B + \frac{a^2 - b^2}{c^2} \sin 2C = 0.$

8. $(b + c) \cos A + (c + a) \cos B + (a + b) \cos C = a + b + c.$

9. $(a + b + c) (\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}) = 2 c \cot\frac{C}{2}.$

10. $\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}}{\cot A + \cot B + \cot C}.$

11. यदि $\cos^{-1} x + \cos^{-1} y + \cos^{-1} z = \pi$, तो दिखाइए कि $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1.$

निम्नलिखित सिद्ध कीजिए:

12. $\tan^{-1}\sqrt{x} = \frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{1-x}{1+x}.$

13. $\tan^{-1}\frac{1}{4} + \tan^{-1}\frac{2}{9} = \frac{1}{2} \tan^{-1}\frac{4}{3}.$

14. यदि $\cos^{-1}\frac{x}{a} + \cos^{-1}\frac{y}{b} = \alpha$, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\alpha + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\alpha.$$

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

ऐसा विश्वास किया जाता है कि त्रिकोणमिति का अध्ययन सर्वप्रथम भारत में आरम्भ हुआ था। आर्यभट्ट (476 ई.), भास्कर प्रथम (600 ई.) भास्कर द्वितीय (1114 ई.), ब्रह्मगुप्त (598 ई.) जैसे अनेक प्राचीन भारतीय गणितज्ञों ने प्रमुख परिणामों को प्राप्त किया था। यह सम्पूर्ण ज्ञान भारत से मध्यपूर्व और पुनः वहाँ से यूरोप गया। यूनानियों ने भी त्रिकोणमिति का अध्ययन आरम्भ किया परन्तु उनकी कार्य विधि इतनी अनुपयुक्त थी, कि भारतीय विधि के ज्ञात हो जाने पर यह सम्पूर्ण विश्व द्वारा अपनायी गई।

भारत में आधुनिक त्रिकोणमितीय फलन जैसे किसी कोण की ज्या और ज्या फलन के परिचय का पूर्व विवरण सिद्धान्त (संस्कृत भाषा में लिखा गया ज्योतिषीय कार्य) में दिया गया है जिसका योगदान गणित के इतिहास में प्रमुख है।

भास्कर प्रथम (600 ई.) ने 90° से अधिक कोणों के साइन के मान के लिए सूत्र दिया था। सोलहवीं शताब्दी का मलयालम भाषा में कार्य 'युक्ति भाषा' में sin (A + B) के प्रसार की एक उपपत्ति है। 18°, 36°, 54°, 72°, आदि के साइन तथा कोसाइन के विशुद्ध मान भास्कर द्वितीय द्वारा दिए गए हैं।

$\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$ आदि को चाप साइन x, चाप कोसाइन x आदि के स्थान पर प्रयोग करने का सुझाव ज्योतिष विद सर जान एफ. डब्ल्यू (1813 ई.) द्वारा दिए गए थे। ऊँचाई और दूरी सम्बन्धी प्रश्नों के साथ थेल्स (600 ई. पूर्व) का नाम अपरिहार्य रूप से जुड़ा हुआ है। उन्हें मिश्र के महान पिरामिड की ऊँचाई के मापन का श्रेय प्राप्त है। इसके लिए उन्होंने एक ज्ञात ऊँचाई के सहायक दण्ड तथा पिरामिड की परछाइयों को नाप कर उनके अनुपातों की तुलना का प्रयोग किया था। ये अनुपात हैं

$$\frac{H}{S} = \frac{h}{s} = \tan (\text{सूर्य का उन्नतांश})$$

थेल्स को समुद्री जहाज की दूरी की गणना करने का भी श्रेय दिया जाता है। इसके लिए उन्होंने समरूप त्रिभुजों के अनुपात का प्रयोग किया था। ऊँचाई और दूरी संबधी प्रश्नों का हल समरूप त्रिभुजों की सहायता से प्राचीन भारतीय कार्यो उदाहरणतः आर्यभट्टीय में मिलते हैं।

क्रमचय और संचय

अध्याय 15

(PERMUTATIONS AND COMBINATIONS)

15.1 भूमिका

आजकल बहुत सारे संगठन कम्प्यूटर का प्रयोग किसी विशेष परीक्षा के लिए विभिन्न प्रश्नपत्रों को तैयार करने के लिए कर रहे हैं। मान लीजिए प्रत्येक प्रश्नपत्र में संख्यांकित प्रश्न I, II, III, IV और V हैं तथा कम्प्यूटर में प्रश्न I के 6 समतुल्य रूप हैं जिसका तात्पर्य है कि इनमें से कोई भी प्रश्न, प्रश्न I के स्थान पर रखा जा सकता है। कम्प्यूटर में प्रश्न II के 8 समतुल्य रूप, प्रश्न III के 5 समतुल्य रूप, प्रश्न IV के 10 समतुल्य रूप तथा प्रश्न V के 5 समतुल्य रूप उपलब्ध है। दो प्रश्नपत्रों को अलग–अलग माना जायेगा यदि उनमें एक या अधिक प्रश्न भिन्न हैं। क्या आप इस प्रकार बने कुल प्रश्न पत्रों की संख्या का अनुमान लगा सकते हैं? आपको जानकर आश्चर्य होगा कि इस प्रकार बने कुल प्रश्नपत्रों की संख्या 12000 होगी। उपर्युक्त समस्या का उत्तर प्राप्त करने के लिए ऐसी गणना की तकनीक (counting technique) का प्रयोग किया गया है जिसका अध्ययन वृहद् शीर्षक, संचय विन्यास का गणित (combinatorial mathematics) या संचय विन्यासिका (combinatorics) के अन्तर्गत होता है। अनेक गणितीय, भौतिकीय, जीव–विज्ञान सम्बन्धी अन्यान्य प्रश्न प्रत्यक्ष या अप्रत्यक्ष रूप में गणना से सम्बन्धित हैं।

क्रमचय और संचय के इस अध्याय में हम मौलिक गणना की तकनीकों का अध्ययन करेंगे जो वस्तुओं को व्यवस्थित करने या वस्तुओं के चयन करने की विभिन्न विधियों को ज्ञात करने में उपयोगी और लाभप्रद होती हैं। इस दिशा में प्रथम कदम के रूप में हम एक सिद्धान्त की जांच करेंगे, जो इन प्रकरणों के अध्ययन में मौलिक रूप से उपयोगी है।

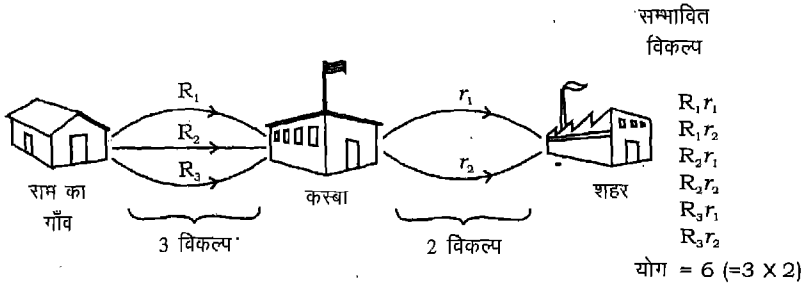
15.2 गणना का मौलिक सिद्धान्त (Fundamental Principle of Counting)

आइए हम पहले निम्नांकित उदाहरणों पर विचार करें :

उदाहरण 1 राम को कस्बे में अपने मित्र अली के यहाँ जाना है। कस्बा राम के गाँव से तीन विभिन्न मार्गों से जुड़ा हुआ है। वह वहाँ से शहर अपने चाचा के यहाँ जायेगा। शहर कस्बे से

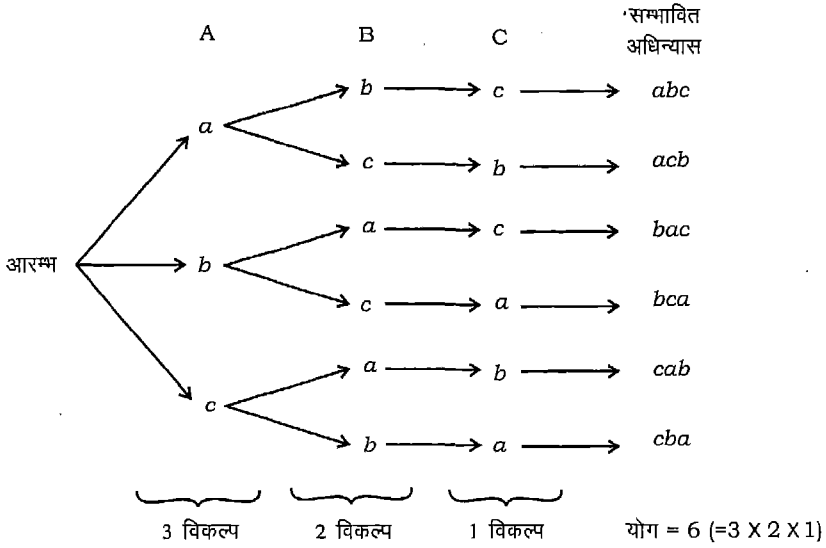
दो विभिन्न मार्गों से जुड़ा हुआ है। उन सभी सम्भव मार्गों की सूची बनाइए, जिनको राम अपने गाँव से शहर जाने के लिए चुन सकता है।

हल मान लीजिए गाँव से कस्बे जाने के लिए तीन विभिन्न रास्तों को R_1, R_2, R_3 से अंकित किया गया है। कस्बा जाने के लिए राम किसी भी रास्ते R_1, R_2 या R_3 का प्रयोग कर सकता है। इस प्रकार राम को कस्बा जाने के लिए मार्गों के तीन विकल्प हैं। तब इनमें से प्रत्येक मार्ग के लिए, वह कस्बे से शहर दो विभिन्न मार्गो r_1 या r_2 किसी से जा सकता है। राम के शहर जाने के सभी सम्भव मार्गों के विकल्प आकृति 15.1 में प्रदर्शित किये गए हैं।

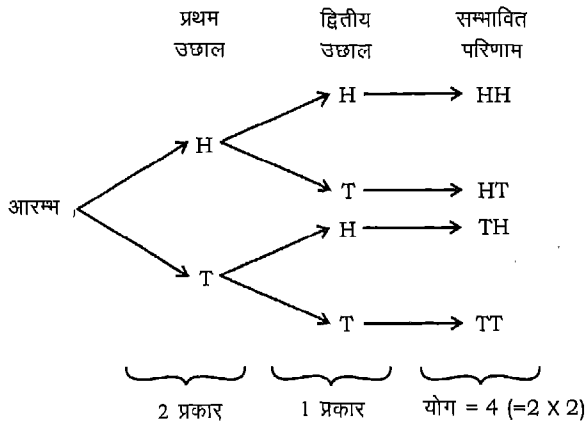
आकृति 15.1 में $R_1 r_1$, मार्ग R_1 तथा उसके पश्चात मार्ग r_1 को व्यक्त करता है, $R_3 r_2$, मार्ग R_3 तथा उसके पश्चात मार्ग r_2 को व्यक्त करता है, आदि। स्पष्टतया, ये 6 विकल्प हैं जो सभी भिन्न–भिन्न हैं।

आकृति 15.1

उदाहरण 2 मान लीजिए a, b, c तीन कार्य हैं तथा A, B और C तीन व्यक्ति हैं। व्यक्तियों को कार्य सौंपने के सभी सम्भव क्रमों की संख्या ज्ञात कीजिए जिससे प्रत्येक व्यक्ति को केवल एक कार्य दिया जा सके।

हल आइये व्यक्ति A से प्रारम्भ करें। A को कोई भी कार्य a, b या c दिया जा सकता है। A को देने के पश्चात B और C को शेष दो कार्यों पर नियुक्त करने के ढंग निम्न वृक्षारेख में प्रदर्शित किये गए हैं (आकृति 15.2, पृष्ठ 521)।

वृक्ष की पहली शाखा यह प्रदर्शित करती है कि A को तीन कार्यों (a, b, c) में से कोई भी एक दिया जा सकता है। इनमें से प्रत्येक के संगत B को शेष दो कार्यों में से कोई एक दिया जा सकता है, जो वृक्ष की दूसरी शाखा से दिखाये गये हैं। इन दो कार्यों में से प्रत्येक के संगत के अन्त में केवल एक कार्य बचता है (जो कि वृक्ष की तीसरी शाखा से दिखाया गया है) जिसे C को दिया जा सकता है। तीनों व्यक्तियों, A, B और C को तीन कार्य a, b और c उपर्युक्त छः तरीकों से दिए जा सकते हैं।

आकृति 15.2

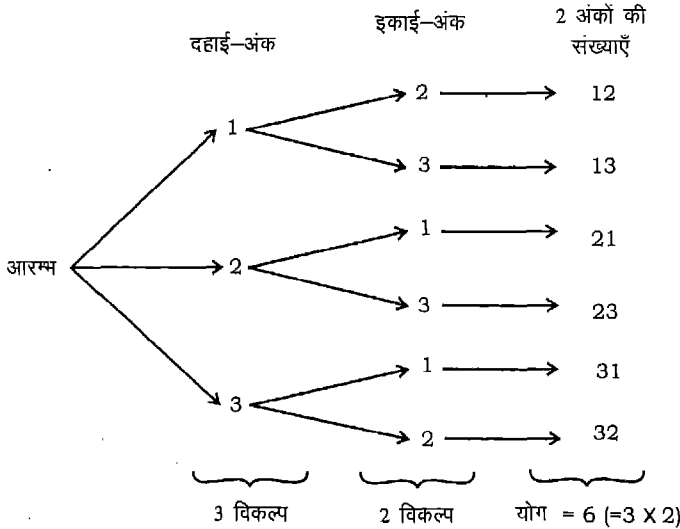
उदाहरण 3 एक सिक्के को दो बार उछाला जाता है और परिणामों को लिख लिया जाता है। सम्भावित परिणामों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल हम चित (Head) प्राप्त करने के फल को H से तथा पट (Tail) प्राप्त करने के फल को T से व्यक्त करेंगे। सम्भावित फलों की संख्या ज्ञात करने के लिए हम निम्नांकित वृक्षारेख बनाते हैं।

आकृति 15.3

इस आकृति में शाखाओं का प्रथम समूह दर्शाता है कि प्रथम उछाल में सिक्का गिरकर दो प्रकार के परिणाम (H या T) दे सकता है। शाखाओं का द्वितीय समूह दर्शाता है कि दूसरे उछाल में सिक्का किस–किस प्रकार का फल दे सकता है (प्रथम उछाल के प्रत्येक सम्भावना के संगत)। बाएं से दाएं प्रत्येक मार्ग के अनुरेखण से हम प्राप्त कर सकते हैं कि सभी सम्भावित परिणाम HH, HT, TH और TT है। इस प्रकार चार सम्भावित परिणाम हैं।

टिप्पणी HT वह फल है जो दर्शाता है कि प्रथम उछाल में चित तथा दूसरे उछाल में पट मिला, जबकि TH वह फल है, जिसमें प्रथम उछाल से पट तथा दूसरे उछाल से चित मिलता है। स्पष्टतः ये दो विभिन्न परिणाम या व्यवस्थाएं हैं।

उदाहरण 4 तीन कार्डों पर संख्याएं 1, 2 और 3 अंकित हैं। दो अंक की कितनी संख्याएं इन कार्डों को आस पास (एक पंक्ति में) रखने से बन सकती है।

हल हम तीनों कार्डों में से किसी एक को लेकर उसे दहाई के स्थान का अंक निरूपित करने के लिए नीचे रखते हैं। तब इस प्रकार रखे गए कार्ड के दाहिने हम बचे कार्डों में किसी एक को इकाई के स्थान का अंक निरूपित करने के लिए रख सकते हैं। आइए अब हम देखते हैं कि इसे वृक्षारेख द्वारा कैसे निरूपित करते हैं।

आकृति 15.4

इस आकृति में शाखाओं का प्रथम समूह दर्शाता है कि दहाई के स्थान के अंक के लिए तीन सम्भावित विकल्प है। शाखाओं का द्वितीय समूह संकेत करता है, कि प्रत्येक प्रथम विकल्प

के संगत इकाई स्थान के अंक के लिए दो सम्भावित विकल्प हैं। इस प्रकार आस पास रखे गए दो कार्डों द्वारा निरूपित दो अंकीय संख्याएं 12, 13, 21, 23, 31, 32, अर्थात कुल छः संख्याएं हैं।

1 से 4 तक के उपर्युक्त उदाहरण एक व्यापक सिद्धान्त, जिसे गणना का मौलिक सिद्धान्त (Fundamental Principle of Counting) कहते हैं, के उपयोग की व्याख्या करते हैं। सिद्धान्त के अनुसार :

यदि एक घटना m विभिन्न प्रकारों से घटित हो सकती है जिसके पश्चात दूसरी घटना n विभिन्न प्रकारों से घटित हो सकती है, जिसके पश्चात अन्य घटना r विभिन्न प्रकारों से घटित हो सकती है, इत्यादि, तो सभी घटनाओं के घटने की विभिन्न प्रकारों की संख्या, दिए क्रम में, $m \times n \times r \times \ldots$ है।

इस सिद्धान्त को **गुणन सिद्धान्त** भी कहते हैं।

उदाहरण 1 में राम के गाँव से अली के कस्बे तक जाने के 3 मार्ग हैं, और कस्बे से शहर जाने के 2 मार्ग हैं। मौलिक गणन सिद्धान्त का प्रयोग करने पर निर्दिष्ट क्रम में कुल प्रकारों की संख्या 3×2 अर्थात 6 है।

उदाहरण 2 में A, B, C तीन व्यक्तियों को तीन कार्यों a, b, c पर नियुक्तियों के कुल प्रकारों की संख्या $3 \times 2 \times 1$ अर्थात 6 है।

उदाहरण 3 में सिक्के के प्रथम उछाल में या तो चित या पट प्राप्त हो सकता है। दूसरे शब्दों में प्रथम उछाल के परिणामों की संख्या दो है। प्रथम उछाल के प्रत्येक परिणाम के संगत, दूसरे उछाल के सम्भावित परिणामों की संख्या 2 है। अतः विभिन्न परिणामों की कुल संख्या 2×2 अर्थात 4 है।

उदाहरण 4 में हमें दो कार्डों को दो अंक की संख्या बनाने के लिए आस पास रखना पड़ता है। स्पष्टतः इस स्थिति में अंकों की पुनरावृति नहीं हो सकती हैं (क्यों?)। दहाई के स्थान पर इन तीन कार्डों में से कोई कार्ड रखा जा सकता है। अतः दहाई स्थान के अंक के लिए तीन विकल्प हैं। दहाई के स्थान के ऐसे प्रत्येक विकल्प के संगत इकाई स्थान के लिए अब दो विकल्प हैं, क्योंकि दो बचे कार्डों में से कोई एक इकाई के स्थान पर रखा जा सकता है। अतः दो अंक की बनी कुल संख्याओं की संख्या 3×2 अर्थात 6 है। हम इस प्रश्न को पहले इकाई स्थान को भरकर भी कर सकते हैं, जिसके कुल 3 प्रकार है। इसके पश्चात दहाई के स्थान को दो विभिन्न प्रकार से भर सकते हैं। इस स्थिति में भी दो अंक की बनी कुल संख्या 6 होगी।

अब हम गणना के मौलिक सिद्धान्त के प्रयोग की व्याख्या के लिए कुछ और उदाहरणों पर विचार करते हैं। मान लीजिए कि हम अनुभाग 15.1 में वर्णित प्रश्नपत्रों के निर्माण संबंधी समस्या

पर वापस आते हैं। हम इसे गणना के मौलिक सिद्धान्त का प्रयोग करके निम्नांकित प्रकार से हल करते हैं।

प्रश्न I के चयन के लिए	:	6 प्रकार (प्रथम घटना)
प्रश्न II के चयन के लिए	:	8 प्रकार (द्वितीय घटना)
प्रश्न III के चयन के लिए	:	5 प्रकार (तृतीय घटना)
प्रश्न IV के चयन के लिए	:	10 प्रकार (चतुर्थ घटना)
प्रश्न V के चयन के लिए	:	5 प्रकार (पंचम घटना)

इस प्रकार कम्प्यूटर $6 \times 8 \times 5 \times 10 \times 5$ अर्थात 12000 परीक्षा पत्र बना सकता है।

उदाहरण 5 एक कक्षा में 30 लड़के और 18 लड़कियां हैं। एक प्रश्नोत्तर प्रतियोगिता के लिए अध्यापक महोदय एक लड़का और एक लड़की का चयन करना चाहते हैं। कितनी विधियों से अध्याापक महोदय इस चयन को कर सकते हैं ?

हल यहाँ अध्यापक महोदय को दो संक्रियाएं करना है।

(i) 30 लड़कों में से 1 लड़के का चयन करना।

(ii) 18 लड़कियों में से 1 लड़की का चयन करना।

संक्रिया (i) अर्थात एक लड़के का चयन 30 प्रकारों से किया जा सकता है, क्योंकि 30 लड़कों में से कोई एक चुना जा सकता है, और (ii) अर्थात एक लड़की का चयन 18 प्रकारों से हो सकता है। अतः गणना के मौलिक सिद्धान्त द्वारा अभीष्ट विधियों की संख्या 30×18 अर्थात 540 है।

उदाहरण 6 अंग्रेजी वर्णमाला के प्रथम दस अक्षरों से कितने 3-अक्षर के कोड शब्द संभव हैं, यदि

(i) अक्षरों की पुनरावृति न हो?

(ii) अक्षरों की पुनरावृति हो?

हल (i) **अक्षर की पुनरावृति नहीं हो सकती है।**

इस स्थिति में कोड के प्रथम अक्षर के चयन की 10 विधियाँ हैं, द्वितीय के लिए 9 तथा तृतीय के लिए 8 विधियाँ हैं। गणना के मौलिक सिद्धान्त के प्रयोग द्वारा कुल $10 \times 9 \times 8$, अर्थात 720, 3-अक्षर के कोड शब्द बनते हैं।

(ii) अक्षरों की पुनरावृति होती है।

इस स्थिति में कोड के प्रथम अक्षर के चयन की 10 विधियाँ हैं, और उतने ही विधियां द्वितीय और तृतीय अक्षर के चयन की हैं, क्योंकि अक्षरों की पुनरावृति हो सकती है। अतः गणन के मौलिक सिद्धान्त के प्रयोग से कुल $10 \times 10 \times 10$ अर्थात 1000, 3-अक्षर के कोड शब्द बनते हैं।

उदाहरण 7 अंकों 1, 2, 3, 4 और 5 से कितनी दो–अंकीय सम संख्याएं बन सकती हैं, यदि अंकों की पुनरावृति हो सकती है?

हल एक संख्या को सम होने के लिए इस स्थिति में इकाई–स्थान के अंक 2 अथवा 4 होंगे।

अतः हमारे पास इकाई–स्थान के लिए 2 विकल्प हैं। इकाई–स्थान के प्रत्येक विकल्प के संगत दहाई–स्थान के लिए दिए 5 अंकों में से कोई भी अंक लिया जा सकता है अर्थात प्रत्येक इकाई–स्थान के विकल्प के संगत दहाई–स्थान के लिए 5 विकल्प होंगे क्योंकि अंकों की पुनरावृति हो सकती है। अतः दो अंक की सम संख्याओं की कुल संख्या 2×5 अर्थात 10 है।

उदाहरण 8 5 व्यक्ति कितने प्रकार से एक कार में बैठ सकते हैं जबकि चालक समेत दो व्यक्ति सामने की सीट पर तथा तीन व्यक्ति पिछली सीट पर बैठते हैं, तथा पाँच व्यक्तियों में से दो व्यक्ति चालक की सीट पर नहीं बैठना चाहते हैं?

हल मान लीजिए कि 5 सीटें अक्षरों A, B, C, D, E द्वारा निदेर्शित है, जिसमें A चालक की सीट है।

3	4	3	2	1
A	B	C	D	E

(चालक–सीट)

हमारे पास सीट A के लिए 3 विकल्प हैं, सीट B के लिए 4 विकल्प, सीट C के लिए 3 विकल्प, सीट D के लिए 2 और सीट E के लिए 1 विकल्प हैं। गणना के मौलिक सिद्धान्त के प्रयोग से बैठक व्यवस्था की कुल संख्या $3 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ अर्थात 72 है।

उदाहरण 9 यदि पाँच विभिन्न झण्डे उपलब्ध हैं तो उन विभिन्न संकेतों (signals) की कुल संख्या ज्ञात कीजिए जिन्हें कम से कम दो झन्डों द्वारा एक ऊर्ध्व दण्ड पर क्रम से एक दूसरे के नीचे रखकर बनाया जा सकता है।

हल एक संकेत दो, तीन, चार या पाँच झण्डों का प्रयोग करके बनाया जा सकता है (क्यों?)। सर्वप्रथम विभिन्न दो झण्डों वाले संकेतों के विभिन्न प्रकारों पर विचार करते हैं। स्पष्टतः गणना के मौलिक सिद्धान्त के अनुसार दिए गए 5 झण्डों से विभिन्न क्रमों में दो झण्डों का चयन 5×4 अर्थात 20 प्रकार से हो सकता हैं।

इसे निम्नांकित प्रकार से भी स्पष्ट किया जा सकता है। हमें दो रिक्त स्थानों को 5 झण्डों द्वारा भरना है। प्रथम स्थान 5 विभिन्न प्रकारों से भरा जा सकता है, और इनमें से प्रत्येक प्रकार के संगत दूसरा स्थान 4 विभिन्न विधियों से भरा जा सकता है।

5	4
प्रथम	द्वितीय

गणना के मौलिक सिद्धान्त के अनुसार दो स्थान कुल 5×4 अर्थात 20 प्रकारों से भरे जा सकते हैं। इसलिए दो झण्डों से बनाए जा सकने वाले संकेतों की कुल संख्या 20 होगी।

इसी प्रकार तीन–झण्डों वाले संकेतों की संख्या, जिन्हें 5 झण्डों में से लेकर बनाया जा सकता है, $5 \times 4 \times 3$ अर्थात 60 है; चार झण्डों वाले संकेतों की संख्या $5 \times 4 \times 3 \times 2$ अर्थात 120 है और पांच झण्डों वाले संकेतों की संख्या $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ अर्थात 120 है। अतः दो, तीन, चार या पाँच झण्डों वाले संकेतों की कुल संख्या प्रत्येक प्रकार के संकेतों की संख्याओं को जोड़ कर प्राप्त की जा सकती है। अतः कम से कम दो झण्डों के प्रयोग से बनाए जाने वाले विभिन्न संकेतों की संख्या $20 + 60 + 120 + 120$ अर्थात 320 है, जिन्हें दिए गए पाँच झण्डों से बनाया जा सकता है।

टिप्पणी हम एक ही समय दो, तीन, चार या पाँच झण्डों वाले संकेतों को एक साथ नहीं बना सकते हैं। जब इस प्रकार की स्थिति होती है, तब हम घटनाओं को **परस्पर अपवर्जी (mutually exclusive)** कहते हैं।

प्रश्नावली 15.1

1. स्थान A से स्थान B जाने के 5 मार्ग, और स्थान B से स्थान C जाने के लिए 3 मार्ग हैं। ज्ञात कीजिए कि B से होकर जाने वाले A से C तक जाने के लिए कुल कितने विभिन्न मार्ग हैं।

2. जॉन समुद्री जहाज से विदेश जाना और हवाई जहाज से वापस लौटना चाहता है। उसके लिए समुद्री जहाज से जाने के 6 विभिन्न विकल्प और हवाई मार्ग से लौटने के 4 विकल्प है। कितने प्रकार से वह अपनी यात्रा पूरी कर सकता है?

3. यदि स्थानों A और B के बीच 20 स्टीमर आवागमन करते हैं, तो कितने प्रकार से आवागमन किया जा सकता है, जबकि वापसी (i) उसी स्टीमर, (ii) विभिन्न स्टीमर से की जाए?

4. 5 नलों से 5 व्यक्ति कितने विभिन्न प्रकार से पानी ले सकते हैं, यदि यह मान लिया गया है कि कोई नल अप्रयुक्त नहीं रहेगा।

5. 7 सीटों वाली एक पंक्ति में 3 व्यक्ति कितने प्रकार से बैठ सकते हैं?

6. एक बेंच पर 8 बच्चों को बैठाना है।

(i) कितने प्रकार से बच्चों को बैठाया जा सकता है?

(ii) कितने विन्यास सम्भव हैं, जबकि सबसे छोटा बच्चा बेंच के बाएं किनारे पर बैठता है?

7. अंग्रेजी वर्णमाला के प्रथम 10 अक्षरों से कितने 4–अक्षर कोड शब्द संभव हैं, यदि किसी अक्षर की पुनरावृति नहीं हो?

8. एक चित्रकला गैलरी में प्रदर्शन के लिए छः चित्रों को बाएं से दाएं एक दीवार पर व्यवस्थित किया जाना हो तो, कितने विन्यास संभव हो?

9. 0 से 9 तक के अंक, कागज के 10 टुकडों पर (प्रत्येक पर एक अंक) अंकित है। कागज के तीन टुकड़े लेकर उन्हें क्रम में रख दिया जाता है। कितने विभिन्न परिणाम संभव हैं?

10. एक सामुहिक फोटोग्राफ के लिए 3 लड़के और 2 लड़कियाँ एक पंक्ति में सभी संभव प्रकार से खड़े किए जाते हैं। यदि प्रत्येक व्यवस्था के संगत एक चित्र हो, तो कितने चित्र खींचे जा सकते हैं?

11. 3 बल्बों के एक नमूने की जांच की जाती है। एक बल्ब पर यदि वह अच्छा है तो G और यदि वह दोषपूर्ण है, तो D लिख दिया जाता है। सभी संभावित परिणामों की संख्या ज्ञात कीजिए। [संकेतः GDD, ऐसे परिणामों में से एक है।]

12. 0 से 9 तक के अंकों का प्रयोग करके कितने 5-अंकीय टेलीफोन नंबर बनाए जा सकते हैं, जबकि प्रत्येक नंबर 67 से प्रारम्भ होता है और टेलीफोन नम्बर में कोई अंक एक बार से अधिक नहीं आता है?

13. अंकों 1, 2, 3, 4 और 5 से कितनी 3-अंकीय संख्याएं बनाई जा सकती है, यदि (i) अंकों की पुनरावृति करने की अनुमति हो? (ii) अंकों की पुनरावृति करने की अनुमति नहीं हो?

14. एक सिक्का तीन बार उछाला जाता है, और उनके परिणाम अंकित कर लिए जाते हैं। कितने संभावित परिणाम मिलते हैं? कितने संभावित परिणाम मिलेंगे यदि सिक्का क्रमशः 4 बार, 5 बार या n बार उछाला जाता है?

15. विभिन्न रंगों के 4 झण्डे दिए गए हैं, कितने विभिन्न संकेत बनाए जा सकते हैं, यदि संकेतों में दो झण्डों का एक दूसरे के नीचे प्रयोग होता है?

16. यदि 6 विभिन्न झण्डे उपलब्ध कराए गए हैं तो विभिन्न संकेतों की संख्या ज्ञात कीजिए जो कम से कम तीन झण्डों को एक उर्ध्वाधर स्तम्भ पर विभिन्न क्रमों में लगाने से बनाए जा सकते हैं।

17. अंकों 1,2,3,9 से कितनी संख्याएं बनायी जा सकती है, यदि अंकों की पुनरावृति नहीं हो सकती है?

18. करतार सिनेमा जाता है। सिनेमा हाल में प्रवेश करने के दो और बाहर जाने के तीन मार्ग हैं। कितने प्रकार से करतार हॉल में जाकर बाहर आ सकता है?

19. एक परीक्षा में 4 बहु–विकल्पीय प्रश्न हैं। उत्तरों के कितने अनुक्रम संभव है, यदि प्रत्येक प्रश्न के दो विकल्प हैं?

20. एक कक्षा में 40 बालिकाएं और 60 बालक हैं। कितनी विधियों से एक अध्यक्ष, उपाध्यक्ष, कोषाधिकारी और सचिव का चयन किया जा सकता है, यदि कोषाधिकारी एक बालिका और सचिव एक बालक ही हो सकता है, और एक विद्यार्थी एक से अधिक पद पर नहीं रह सकता है?

15.3 क्रमगुणित संकेतन

क्रमचय और संचयँ की संकल्पनाओं से परिचित होने के पूर्व आइए हम एक उपयोगी तथा महत्वपूर्ण संकेतन सीख लें जो प्रथम n प्राकृत संख्याओं के गुणनफल को व्यक्त करने की एक सुविधाजनक विधि है। इस संकेतन में हम वांछित गुणनफल दर्शाने के लिए सबसे बड़ी प्राकृत संख्या के बाद चिन्ह (!) लगा देते हैं। इस प्रकार

$$3! = 3\times2\times1$$

$$5! = 5\times4\times3\times2\times1 = 120$$

$$6! = 6\times5\times4\times3\times2\times1 = 720.$$

इन गुणनफलों में से प्रत्येक को क्रमगुणित (factorial) कहते हैं। 3! को हम तीन क्रमगुणित 5! को पाँच क्रमगुणित इत्यादि पढ़ते हैं।

हम $n!$ को निम्न रूप में परिभाषित करते हैं,

$$n! = n(n-1)\ (n-2)\ldots.\ (3)\ (2)\ (1),$$

और $n!$ को n क्रमगुणित (n factorial) पढ़ते हैं, जहाँ n एक प्राकृत संख्या है। कुछ लेखक इसके लिए $\underline{|n}$ संकेतन का प्रयोग करते हैं, इसे क्रमगुणित n (factorial n) पढ़ा जाता है।

हम देखते हैं कि

$$1! = 1$$

हम यह भी देखते हैं कि

$$n! = n\ (n-1)!$$

साथ ही $\quad n! = n(n-1)(n-2)!$

और $\quad n! = n(n-1)(n-2)(n-3)! = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!$ इत्यादि।

यहाँ हम मान लेते हैं कि उपर्युक्त संबन्ध सत्य हैं जहाँ कहीं प्रयुक्त क्रमगुणित परिभाषित हैं।

आगे आने वाले परिणामों में प्रयोग करने के लिए हम परिभाषित करते हैं, कि

$$0! = 1$$

उदाहरण 10 $\frac{6!}{5!}$ ज्ञात कीजिए।

हल हम जानते हैं कि

$$\frac{6!}{5!} = \frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{5\times4\times3\times2\times1} = 6$$

उदाहरण 11 परिकलित कीजिए $\frac{52!}{(47!)(5!)}$

हल हम जानते हैं कि

$$\frac{52!}{(47!)(5!)} = \frac{52.51.50.49.48.(47!)}{(47!).5\times4\times3\times2\times1} = 2598960.$$

प्रश्नावली 15.2

1. मान ज्ञात कीजिए

(i) 4! (ii) 6! (iii) 7! (iv) 8! – 5!

(v) 6! – 5! (vi) 2×6! – 3×5! (vii) 3×4!+7×4!

2. परिकलित कीजिए 2! + 3!. क्या 2! + 3! = 5! है?

3. परिकलित कीजिए : (4!) (2!). क्या (4!) (2!) = 8! है?

4. परिकलित कीजिए : $\frac{8!}{4!}$. क्या $\frac{8!}{4!} = 2!$ है?

5. परिकलित कीजिए : $\frac{20!}{18!(20-18)!}$.

6. मान निकालिए : (i) $\frac{6!}{2\times4!}$ (ii) $\frac{7!}{4!\times2!}$

7. यदि $\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!}=\frac{x}{11!}$, x का मान ज्ञात कीजिए।

8. $(n-r)!$, का मान निकालिए : जब

(i) $n = 6, r = 2.$ (ii) $n = 9, r = 5.$

9. $\frac{n!}{(n-r)!}$, का मान निकालिए : जब

(i) $n = 10, r = 4.$ (ii) $n = 12, r = 3$

(iii) $r = 1.$ (iv) $r = 2$ (v) $r = 3.$

10. $\frac{n!}{r!(n-r)!}$, का मान निकालिए : जब

(i) $n = 6, r = 2$ (ii) $n = 7, r = 4$ (iii) $n = 15, r = 12.$

15.4 क्रमचय

आइए हम उदाहरण 2 पर पुनः विचार करें। हम देख चुके हैं कि अक्षरों a, b, c, के विभिन्न विन्यास $abc, acb, bac, bca, cab, cba$ हैं। ध्यान देने योग्य विशिष्ट बात वह क्रम है, जिसमें

तीनों अक्षर व्यवस्थित हैं। यहाँ *abc* का अर्थ है कि कार्य *a* व्यक्ति A को दिया गया, कार्य *b* व्यक्ति B तथा कार्य *c* व्यक्ति C को दिया गया हैं, जबकि *acb* का अर्थ है कि कार्य *a* व्यक्ति A को, कार्य *c* व्यक्ति B को और कार्य *b* व्यक्ति C को दिया गया है इत्यादि। उदाहरण 3 में परिणाम TH परिणाम HT से भिन्न है (क्यों?)। H और T के घटित होने के क्रम को ध्यान में रखना चाहिए। इसी प्रकार उदाहरण 4 में परिणाम 12 के यदि घटित होने के क्रमों को परस्पर परिवर्तित कर दें तो हम 21 पाते हैं, जो 12 से भिन्न है। स्थितियां, जिनमें घटनाओं के घटित होने के क्रम का विशिष्ट महत्व है, क्रमचयों की संकल्पना का बोध कराती हैं।

क्रमचय सुनिश्चित क्रम में एक विन्यास है, जिसको दी हुई वस्तुओं में से सभी या कुछ को एक साथ लेकर बनाया गया है।

उदाहरण 2 के प्रत्येक परिणाम *abc, acb bac, bca, cab, cba* एक क्रमचय हैं। उदाहरण 3 में प्रत्येक परिणाम HH, HT, TH, TT एक क्रमचय हैं। इसी प्रकार उदाहरण 4 में प्रत्येक 2-अंक की संख्या एक क्रमचय है।

गणना का मौलिक सिद्धान्त क्रमचयों के अध्ययन में प्रभावशाली ढंग से प्रयुक्त किया जा सकता है। अब हम दो महत्वपूर्ण प्रमेयों के विषय में बताते हैं, जो n विभिन्न वस्तुओं से कुछ अथवा सभी को एक समय लेकर बने क्रमचयों की संख्या ज्ञात करने में सहायक हैं।

प्रमेय 1 n विभिन्न वस्तुओं से सभी को लेकर बने क्रमचयों की संख्या, जो ${}^{n}P_{n}$ द्वारा व्यक्त की जाती है, का मान निम्नांकित है

$$ {}^{n}P_{n} = n(n-1)(n-2)...3.2.1 = n! $$

उपपत्ति हम n विभिन्न वस्तुओं को एक पंक्ति में n स्थानों पर व्यवस्थित करना चाहते हैं। आइए हम उनके घटित होने के स्थानों को पहले, दूसरे, तीसरे, ..., n वें स्थान से व्यक्त करें

हम प्रथम स्थान पर n वस्तुओं में से कोई एक रख सकते हैं। अतः हमारे पास प्रथम स्थान के लिए n विकल्प हैं।

दूसरे स्थान के लिए केवल $(n-1)$ वस्तुएं बचती हैं, अतः हमारे पास इस स्थान के लिए $(n-1)$ विकल्प हैं। इसी प्रकार तृतीय स्थान के लिए हमारे पास $(n-2)$ विकल्प हैं इत्यादि।

n वें स्थान पर पहुँचने तक हम $(n-1)$ वस्तुओं का प्रयोग कर चुके होंगे। इस प्रकार n वें स्थान के लिए हमारे पास $[n-(n-1)]$ वस्तुएँ अर्थात 1 ही विकल्प है।

स्थान	:	पहला	दूसरा	तीसरा	... n वां
विकल्पों की संख्या	:	n	$(n-1)$	$(n-2)$	... 1

अतः गणना के मौलिक सिद्धान्त द्वारा n विभिन्न वस्तुओं से एक बार में सभी को लेकर

प्राप्त बने क्रमचयों की संख्या, ${}^nP_n$, निम्न गुणनफल है :

$$n(n-1)(n-2) \ldots 3.\ 2.\ 1 \text{ अर्थात } n!.$$

प्रमेय 2 n विभिन्न वस्तुओं से एक बार में r वस्तुएं लेकर प्राप्त क्रमचयों की संख्या, जो ${}^nP_r$ $(r < n)$ द्वारा व्यक्त है, निम्नांकित है

$${}^nP_r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$$

उपपत्ति यह प्रमेय 1 की भाँति ही है।

हम दर्शायेंगे कि ${}^nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$.

हम जानते हैं कि

$${}^nP_r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!}$$

[$(n-r)!$ से अंश तथा हर में गुणा करें।]

$$= \frac{n!}{(n-r)!},$$

चूंकि $n(n-1)(n-2) \ldots (n-r-1)(n-r)! = n(n-1)(n-2) \ldots 3.2.1 = n!$

टिप्पणी यदि $r = n$, तो n वस्तुओं से एक बार में n लेने पर बने क्रमचयों की संख्या है

$${}^nP_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!, \text{ (स्मरण करें, } 0! = 1 \text{ है।)}$$

जो प्रमेय 1 के अनुरूप है, जैसा कि इसे होना भी चाहिए।

कुछ लेखक क्रम संचय प्रतीक ${}^nP_r$ को P_r^n, ${}^nP_r$ या $P(n, r)$ द्वारा व्यक्त करते हैं, परन्तु हम ${}^nP_r$ के प्रयोग को प्राथमिकता देंगे।

15.4.1 ***क्रमचय जब सभी वस्तुए विभिन्न नहीं हैं*** पूर्व की प्रमेयों में हमने विभिन्न वस्तुओं के क्रमचयों का अध्ययन किया है। यदि वस्तुओं में से कुछ अभिन्न या सर्वसम है, तो इन प्रमेयों का प्रयोग नहीं हो सकता है।

हम शब्द BEE के अक्षरों से बने सभी विभिन्न क्रमचयों को ज्ञात करें। यहाँ दो अक्षर अभिन्न हैं। यदि हम दो E को E_1 तथा E_2 नाम देकर दो अलग अलग अक्षर मानें तो तीनों अक्षर

B, E_1, E_2 विभिन्न होंगे। हम जानते हैं कि B, E_1, E_2 के विभिन्न क्रमचयों की संख्या 3! है। ये सभी क्रमचय हैं :

$$BE_1E_2, \qquad E_1BE_2, \qquad E_1E_2B,$$
$$BE_2E_1, \qquad E_2BE_1, \qquad E_2E_1B.$$

एक क्षण के लिए यदि हम पादांकों (subscripts) को समाप्त कर दें तो हम देखते हैं, कि प्रत्येक स्तम्भ के दोनों क्रमचय भिन्न नहीं हैं। अतः हम तीन विभिन्न क्रमचय BEE, EBE, EEB प्राप्त करते हैं। चूंकि क्रमचयों का प्रत्येक युग्म पादांक के साथ पादांकरहित होने पर केवल एक क्रमचय देता है, इसलिए BEE के अक्षरों से बने विभिन्न क्रमचयों की संख्या

$$P = \frac{3!}{2!} = 3.$$

द्वारा प्राप्त होती है।

यही तर्क व्यापक स्थिति जिसमें n वस्तुओं में से n_1 अभिन्न अथवा सर्वसम है, में भी प्रयुक्त की जा सकती है। इस प्रकार हम निम्नांकित प्रमेय पाते हैं :

प्रमेय 3 यदि n वस्तुओं से सभी को एक साथ लेकर बने क्रमचयों की संख्या P जहाँ n_1 वस्तुएं एक प्रकार की हैं और अन्य विभिन्न हैं तो

$$P = \frac{n!}{n_1!}$$

द्वारा ज्ञात की जाती है।

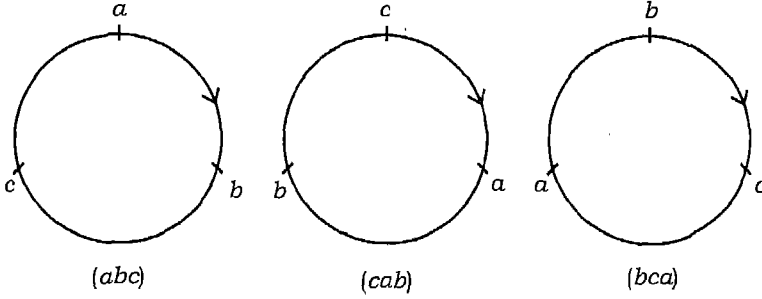
हम इस प्रमेय को आगे निम्नांकित रूप में व्यापकता प्रदान करते हैं,

n वस्तुओं से सभी को एक साथ लेकर बनाए गए विभिन्न क्रमचयों की संख्या P, जहाँ n_1 वस्तुएँ एक प्रकार की n_2 वस्तुएं दूसरे प्रकार की हैं, और इस प्रकार अन्य, तो

$$P = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots},$$

द्वारा ज्ञात किया जाता है जहाँ $n_1 + n_2 + \ldots = n$.

15.4.2 वृत्तीय क्रमचय अब तक हमने वस्तुओं को एक पंक्ति में होने पर क्रमचयों का अध्ययन किया है। इन क्रमचयों को रैखिक–क्रमचय कहते हैं, यदि हम वस्तुओं को पंक्ति के स्थान पर एक वृत्त में व्यवस्थित करें, तब हम वृत्तीय क्रमचयों की चर्चा करते हैं।

मान लीजिए तीन वस्तुओं a, b, c को एक वृत पर व्यवस्थित करना चाहते हैं जैसा कि निम्नांकित हैं। आकृति 15.5 में प्रदर्शित विन्यासों में हम विभेद नहीं कर सकते हैं।

आकृति 15.5

वास्तव में ये तीनों विन्यास एक ही क्रमचय को निरूपित करते हैं।

आप देख सकते हैं कि उपर्युक्त में कोई एक अन्य दूसरे से सरलतापूर्वक वृत को घुमा कर प्राप्त कर सकते हैं। ऐसे किसी एक विन्यास में प्रथम स्थान नहीं है, इसलिए यदि प्रत्येक वस्तु अपने स्थिति से एक स्थान घड़ी की सूई की दिशा में (या घड़ी की सूई की विपरीत दिशा में) सरकती है तो उसकी सापेक्ष स्थिति में परिवर्तन नहीं होता है। वस्तुतः प्रत्येक वस्तु 3 बार अपनी स्थिति से सरकाने पर विन्यास को बिना प्रभावित किए, पुनः अपनी मौलिक स्थिति में आ जाती है, इस प्रकार उपर्युक्त तीन क्रमचय नामतः abc, cab, bca मात्र एक ही हैं। परन्तु रैखिक दृष्टि से विभिन्न हैं।

इस प्रकार तीन वस्तुओं के एक वृतीय क्रमचय से 3 विभिन्न रैखिक क्रमचय प्राप्त होते हैं। यदि विभिन्न वृतीय क्रमचयों की संख्या P′ है, तो हमारे पास कुल 3P′ रैखिक क्रमचय होंगे। अतः

$$3P' = 3!, \text{ अर्थात् } P' = \frac{3!}{3} = (3-1)! = 2!$$

यदि n विभिन्न वस्तुएं एक वृत पर व्यवस्थित की जाती हैं, तो प्रत्येक वस्तु n बार अपनी स्थिति से (घड़ी की सुई की दिशा में या घड़ी की सुई की विपरीत दिशा में) सरकाने पर विन्यास को बिना प्रभावित किए पुनः अपना मौलिक स्थिति में आ जाती है। इस प्रकार प्रत्येक वृतीय क्रमचय से n रैखिक क्रमचय प्राप्त होते है तथा विभिन्न वृतीय क्रमचयों की संख्या P′ का मान

$$P' = \frac{n!}{n} = (n-1)!.$$

द्वारा प्राप्त है।

आइए, हम क्रमचय संबंधी कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 12 नगरपालिका चुनाव में 6 उम्मीदवार किसी एक पद के लिए चुनाव मैदान में हैं। कितने विभिन्न प्रकार से उनके नाम एक मत–पत्र पर सूचीबद्ध किए जा सकते हैं?

हल हम 6 नामों को 6 स्थानों पर रखने के तरीकों की संख्या ज्ञात करना चाहते हैं।

स्पष्टतः अभीष्ट संख्या का मान

$${}^6P_6 = 6! = 720$$

द्वारा प्राप्त है।

इस प्रकार 6 उम्मीदवारों के नाम मत–पत्र पर 720 तरीकों से सूचीबद्ध किए जा सकते हैं।

उदाहरण 13 1 से 9 तक के अंकों के प्रयोग से 4-अंक की कितनी संख्याएं बनायी जा सकती हैं, यदि अंकों की पुनरावृति की अनुमति नहीं है?

हल दिए गए 9 अंकों के प्रयोग से 4 अंक की संख्याओं की संख्या ज्ञात करना है 1 यह प्रश्न 9 वस्तुओं से 4 वस्तुओं को लेकर बने क्रमचयों की संख्या ज्ञात करने के समतुल्य है। यह ${}^9P_4$ के बराबर है जिसका मान,

$${}^9P_4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = 9.8.7.6 = 3024.$$

द्वारा प्राप्त होता है।

इस प्रकार दिए गए 9 अंकों के प्रयोग से 4 अंकों की 3024 विभिन्न संख्याएं बनाई जा सकती हैं।

उदाहरण 14 एक कार्यालय के चार पदों को भरने के लिए 6 प्रत्याशी साक्षात्कार के लिए बुलाए जाते हैं। यह मानते हुए कि प्रत्येक प्रत्याशी प्रत्येक पद के लिए उपयुक्त हैं, उन विधियों की संख्या ज्ञात कीजिए, जिनसे

(i) प्रथम और द्वितीय पद भरे जा सकते हैं।

(ii) प्रथम तीन पद भरे जा सकते हैं।

(iii) सभी चार पद भरे जा सकते हैं।

हल

(i) क्रम में प्रथम और द्वितीय पदों को भरने के प्रकारों की संख्या ज्ञात करने के लिए, हमें 6 वस्तुओं से 2 वस्तुओं को लेकर बनाए गए विभिन्न क्रमचयों की संख्या ज्ञात करना हैं। स्पष्टतः इसका मान ${}^6P_2$ है, जो

$$^6P_2 = \frac{6!}{4!} = 6 \times 5 = 30$$ है।

अतः प्रथम और द्वितीय पदों को भरने के कुल 30 विधियों हैं।

(ii) जैसा कि (i) में व्याख्या की गयी है, इसके लिए हमें $^6P_3$ की गणना करना है।

$$^6P_3 = \frac{6!}{3!} = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

अतः प्रथम तीन स्थान 120 विधियों से भरे जा सकते हैं।

(iii) उसी प्रकार सभी 4 पद, $^6P_4$ विधियों से भरे जा सकते हैं।

अब $$^6P_4 = \frac{6!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

अतः सभी 4 पद 360 विभिन्न विधियों से भरे जा सकते हैं।

उदाहरण 15 n का मान ज्ञात कीजिए ताकि

(i) $^nP_5 = 42\, ^nP_3, n > 4$

(ii) $\frac{^nP_4}{^{n-1}P_4} = \frac{5}{3}, n > 4$

हल (i) दिया है

$$^nP_5 = 42\, ^nP_3,$$

अर्थात $$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 42\, n(n-1)(n-2)$$

चूँकि $n > 4$, $n(n-1)(n-2) \neq 0$, इसलिए दोनों पक्षों को $n(n-1)(n-2)$ से भाग करने पर हम पाते हैं, कि

$$(n-3)(n-4) = 42$$

या $$n^2 - 7n - 30 = 0$$

या $$(n-10)(n+3) = 0$$

अतः $$n = 10, -3$$

स्पष्टतः n ऋणात्मक नहीं हैं (क्यों?)। इस प्रकार $n = 10$ अभीष्ट मान है।

(ii) दिया है, कि $\frac{^nP_4}{^{n-1}P_4} = \frac{5}{3}$,

अर्थात $$3n(n-1)(n-2)(n-3) = 5(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$$

चूँकि $n>4$, $(n-1)(n-2)(n-3) \neq 0$, इसलिए दोनों पक्षों में $(n-1)(n-2)(n-3)$ से भाग करने पर हम पाते हैं, कि

$3n = 5(n-4)$, अर्थात, $n = 10$

उदाहरण 16 यदि ${}^{10}P_r = 2\ {}^9P_r$, तो r ज्ञात कीजिए।

हल दिया है ${}^{10}P_r = 2\ {}^9P_r$

इसलिए $$\frac{10!}{(10-r)!} = 2.\frac{9!}{(9-r)!},$$

या $$\frac{10 \times 9!}{(10-r)(9-r)!} = 2.\frac{9!}{(9-r)!} \text{ या } \frac{10}{10-r} = 2$$

अर्थात $r = 5$

उदाहरण 17 MONDAY शब्द के अक्षरों से कितने शब्द (शब्दकोष अर्थयुक्त अथवा नहीं) बनाए जा सकते हैं, जबकि किसी अक्षर की पुनरावृति अनुमन्य नहीं है और यदि

(i) किन्हीं 4 अक्षरों को एक साथ लिया जाता है?

(ii) सभी अक्षरों को एक साथ लिया जाता है?

(iii) सभी अक्षरों को एक साथ लिया जाए परन्तु प्रथम अक्षर स्वर हो?

हल शब्द MONDAY में कुल 6 अक्षर हैं।

(i) MONDAY शब्द के अक्षरों से 4 अक्षरों वाले बने शब्दों की संख्या के लिए हमें 6 वस्तुओं से 4 लेकर बनाए गए क्रमचयों की संख्या अर्थात ${}^6P_4$ का मान ज्ञात करना है।

$$^6P_4 = \frac{6!}{(6-4)!} = 360$$

(ii) 6 वस्तुओं से सभी को लेकर बनाए गए क्रमचयों की संख्या ${}^6P_6$ है, जिसका मान निम्नांकित हैं

$$^6P_6 = 6! = 720$$

(iii) प्रत्येक क्रमचय का प्रथम अक्षर O या A है। इस प्रकार प्रथम अक्षर के लिए हमारे पास 2 विकल्प हैं, प्रथम अक्षर के चयन के पश्चात शेष 5 अक्षरों का चयन बिना किसी प्रतिबन्ध के किया जा सकता है, और इसके फलस्वरूप ${}^5P_5$ या 5! या 120 प्रकार प्राप्त होते हैं।

अतः शब्दों की अभीष्ट संख्या $= 2 \times 120 = 240$

उदाहरण 18 1 से 1000 तक कितनी प्राकृत संख्याएं ऐसी हैं जिनमें से किसी में भी अंकों की पुनरावृति नहीं हुई है?

हल 1 से 1000 के बीच हमें 1-अंक की संख्याऐं, 2-अंक की संख्याएं तथा 3-अंक की संख्याओं की जाँच करनी है तथा देखना है कि इनमें से कितनी ऐसी है जिनके सभी अंक भिन्न–भिन्न हैं। स्पष्टतः हम 1000 की उपेक्षा कर रहे हैं, क्योंकि इसमें 0 पुनरावृत है।

1-अंक की संख्याओं से कोई समस्या नहीं होती। स्पष्टतः ये 9 हैं, जिनमें अंक विभिन्न हैं।

आइए, अब हम 2-अंकों की ऐसी संख्याओं की संख्या ज्ञात करें, जिनमें सभी अंक भिन्न हों। दहाई के स्थान पर हम 1, 2, ..., 9 में से कोई एक अंक रख सकते हैं, (स्पष्टतः हम 0 को दहाई के स्थान पर नहीं रख सकते हैं।) इस प्रकार दहाई स्थान के लिए $^9P_1$ अर्थात 9 विकल्प हैं।

इसी प्रकार इकाई के स्थान के लिए भी $^9P_1$ अर्थात 9 विकल्प हैं, क्योंकि अंकों की पुनरावृति मान्य नहीं हैं। इस प्रकार 2-अंकों की विभिन्न अंकों वाली कुल 9×9 अर्थात 81 संख्याएं हैं।

ठीक इसी प्रकार हम 3-अंकों की संख्याओं की संख्या ज्ञात कर सकते हैं, जिनमें कोई अंक पुनरावृत नहीं है। इनकी संख्या $9 \times 9 \times 8$ अर्थात 648 है।

इस प्रकार, 1 से 1000 के बीच की प्राकृत संख्याओं में कुल $9 + 81 + 648$ अर्थात 738 प्राकृत संख्याएं ऐसी हैं जिनमें किसी भी अंक की पुनरावृत्ति नही होती।

उदाहरण 19 कितने प्रकार से 4 लाल, 3 पीली और 2 हरी तश्तरियाँ एक पंक्ति में व्यवस्थित की जा सकती हैं, यदि एक रंग वाली तश्तरियाँ विभिन्न नहीं हैं?

हल तश्तरियाँ की कुल संख्या $= 4 + 3 + 2 = 9$

9 तश्तरियों में से 4 अभिन्न (लाल), 3 अभिन्न (पीली) तथा 2 अभिन्न (हरी) हैं।

$\therefore$ अतः विन्यासों की संख्या $= \dfrac{9!}{4!3!2!} = 1260$ (प्रमेय 3 के प्रयोग करने पर)

इस प्रकार तश्तरियों को 1260 प्रकारों से एक पंक्ति में व्यवस्थित किया जा सकता है।

उदाहरण 20 कितने विभिन्न प्रकारों से 6 व्यक्तियों को एक गोल मेज के चारों ओर बैठाया जा सकता है?

हल वृतीय क्रमचय के सूत्र का प्रयोग करते हुए 6 व्यक्तियों को गोल मेज के चारों और बैठाने के कुल तरीके $(6 - 1)!$ अर्थात $5!$ या 120 हैं।

प्रश्नावली 15.3

1. 6 विभिन्न रंग के झण्डों से कितने संकेत बनाए जा सकते हैं, यदि प्रत्येक संकेत में सभी झण्डे एक साथ एक दूसरे के नीचे रखे जाते हैं?

2. एक कार्यक्रम में 7 गाने गाये जाने हैं। कितने विभिन्न क्रमों में उनका गायन हो सकता है?

3. स्तम्भ A में 6 सामग्रियाँ और स्तंभ B में 6 सामग्री हैं। एक छात्र को स्तंभ A की वस्तुओं में से प्रत्येक का मिलान स्तंभ B के केवल एक सामग्री से करने के लिए कहा जाता है। प्रश्न के विभिन्न संभावित उत्तरों (शुद्ध या अशुद्ध) की संख्या कितनी है?

4. 4 पुस्तकों में रसायन, भौतिकी, जीव–विज्ञान और गणित की एक–एक पुस्तक हैं। इनको एक सेल्फ में व्यवस्थित करना है। कितने प्रकार से ये कार्य किये जा सकते हैं?

5. अंकों 1, 2, 3, 4, 6, 7 से कितनी सम संख्याएं बनायी जा सकती है, यदि किसी भी संख्या में अंकों की पुनरावृति न हो?

6. अंकों 1, 2, 3, 4, 5 के प्रयोग से 4–अंक की कितनी संख्याएं बनायी जाती है, यदि किसी संख्या में एक अंक एक बार से अधिक प्रयुक्त न हो? इन संख्याओं में कितनी सम संख्याएं होगी?

7. चार अंकों की कितनी संख्याएं हैं जिनमें प्रत्येक में कोई अंक पुनरावृत नहीं है?

8. दस घोड़े एक दौड़ में भाग ले रहे हैं। कितने तरह से ये घोड़े प्रथम, द्वितीय तथा तृतीय स्थान प्राप्त कर सकते हैं, यह मान लिया गया है, कि एक साथ निर्दिष्ट स्थान पर एक से अधिक घोड़े नहीं पहुचते हैं?

9. आठ व्यक्तियों की एक समिति से कितने प्रकार से एक अध्यक्ष और एक उपाध्यक्ष चुने जा सकते हैं, यह मान लिया गया है, कि एक व्यक्ति एक से अधिक पद पर नहीं रह सकता है?

10. बारह उम्मीदवारों के एक समूह में से कितने प्रकार से अध्यक्ष, उपाध्यक्ष, सचिव और कोषाधिकारी को चुना जा सकता है, यदि 12 उम्मीदवारों में से कोई भी किसी भी पद के लिए चुना जा सकता है?

11. सिद्ध कीजिए

    (i) ${}^nP_n = 2\,{}^nP_{n-2}$ (ii) ${}^{10}P_3 = {}^9P_3 + 3\,{}^9P_2$

12. r का मान ज्ञात कीजिए यदि

    (i) ${}^5P_r = 2\,{}^6P_{r-1}$ (ii) $5\,{}^4P_r = 6\,{}^5P_{r-1}$ (iii) ${}^5P_r = {}^6P_{r-1}$

13. यदि ${}^{n-1}P_3 : {}^nP_4 = 1 : 9$ तो n का मान ज्ञात कीजिए।

14. सिद्ध कीजिए कि ${}^nP_r = {}^{n-1}P_r + r\,{}^{n-1}P_{r-1}$.

15. शब्द EQUATION के सभी अक्षरों को एक साथ लेकर कुल कितने शब्द बन सकते हैं, जिनमें एक अक्षर केवल एक बार प्रयुक्त है?

16. TUESDAY शब्द के अक्षरों को एक पंक्ति में इस प्रकार व्यवस्थित किया जाता है ताकि प्रत्येक शब्द के अन्त में S आता है। ऐसे कितने विभिन्न विन्यास बन सकते हैं तथा इनमें से कितने का प्रारम्भ D से होता है?

17. ORIENTAL शब्द के अक्षरों के प्रयोग से 3–अक्षरों वाले कुल कितने शब्द बन सकते हैं?

18. DAUGHTER के अक्षरों से विभिन्न 8-अक्षर वाले विन्यास (शब्द) बनाए जाते हैं। इनसे ऐसे विन्यासेां की संख्या ज्ञात कीजिए जिनमें सभी स्वर एक साथ प्रयुक्त हों।

19. अंकों 2, 3, 4 और 6 से 4-अंकों वाली कितनी संख्याएं बन सकती है, यदि एक संख्या में एक अंक केवल एक बार ही प्रयुक्त हो? इनमें से कितनी संख्याओं के अन्त में

(i) 4 (ii) 3 (iii) 3 या 6

का अंक है।

20. यदि एक अंक केवल एक बार ही प्रयुक्त हों तो अंकों 1,2,3,4 और 5 से बनी 40000 से बड़ी संख्याओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

21. अंकों 2,3,4,5 और 8 के प्रयोग से 80000 से बड़ी कितनी विषम संख्याएं बनाई जा सकती हैं, यदि संख्या में प्रत्येक अंक केवल एक बार ही प्रयुक्त हो?

22. एक थैले में 3 सफेद, 4 लाल और 1 नीली गोलियाँ है। वे एक एक करके निकाली जाती है और एक पंक्ति में व्यवस्थित की जाती है। यह मानते हुए की सभी 8 गोलियाँ निकाली गयी है, विभिन्न विन्यासों की संख्या ज्ञात कीजिए यदि एक रंग की सभी गोलियाँ अभिन्न और सर्वसम है।

23. पाँच झण्डों में 3 लाल, 1 सफेद और 1 नीला हैं। इन्हें एक दंड पर एक दूसरे के नीचे रखकर व्यवस्थित किया जाता है। यदि एक रंग के सभी झण्डे अभिन्न और सर्वसम हों तो विन्यासों की संख्या कितनी है?

24. MISSISSIPPI के अक्षरों से बनाए गये क्रमसंचयों में कितने ऐसे हैं जिनमें चार I एक साथ नहीं आते हैं?

25. कितने विभिन्न प्रकारों से गुणनफल xy^2z^2 को लिखा जा सकता है, जिनमें घात का प्रयोग नहीं किया गया है? [संकेत : लेखन का एक प्रकार $xyyzz$ है]

26. चार व्यक्ति A, B, C और D को एक गोल मेज के चारों ओर बैठाया जाता है। कितने प्रकारों से उन्हें बैठाया जा सकता है?

27. 5 व्यक्तियों A, B, C, D और E को कितने प्रकारों से एक गोल मेज के चारों ओर बैठाया जा सकता है यदि

(i) B और D आस–पास बैठते हैं?

(ii) A और D आस–पास नहीं बैठते हैं?

15.5 संचय

पूर्व अनुभागों में वस्तुओं के विभिन्न क्रमचयों का अध्ययन करते समय हम देख चुके हैं कि क्रमचय में वस्तुओं के घटित होने का क्रम का महत्व होता है। अब हम गणना के ऐसे प्रश्नों पर विचार करते हैं, जिनमें घटित होने में क्रम का महत्व नहीं है। निम्नांकित उदाहरणों पर विचार कीजिए।

उदाहरण 21 4 बालकों से 2 बालकों की एक समिति का चयन करना है। कितने प्रकार से यह किया जा सकता है?

हल मान लीजिए कि 4 बालक क्रमशः A,B, C और D द्वारा व्यक्त हैं, इन चारों में से हमें दो का चयन करना है। संभावित विभिन्न विकल्प निम्नांकित हैं।

(i) A और B (ii) B और C (iii) C और D

(iv) A और D (v) A और C (vi) B और D.

मान लीजिए कि A और B को AB द्वारा निरूपित किया जाता है, और आदि आदि।

4 लड़कों के एक समूह से एक समिति में हमारी रूचि उन व्यक्तियों में होती है, जो कि समिति के सदस्य है न कि लड़कों के किसी विन्यास से है। यहाँ पहले A को चुने फिर B को या पहले B को चुने फिर A को, इसका कोई महत्व नहीं है। वास्तविक रूप में दोनों अर्थात AB और BA एक ही हैं, और आदि आदि। A, B, C D मेंसे दो को लेकर बनाए गए उपर्युक्त सूचीबद्ध छः जोड़े संचय कहलाते हैं। इस प्रकार 4 लड़कों में से 2 लड़कों को चयन करने की 6 विधियाँ हैं।

विभिन्न वस्तुओं में से कुछ या सभी के चयन संचय कहलाते हैं। एक संचय में चयनित वस्तुओं के क्रम महत्वहीन हैं।

वस्तुओं के क्रमचय और संचय में अंतर यह है कि क्रमचय में वस्तुओं के क्रम का महत्व है, परन्तु संचय में वस्तु के क्रम का महत्व नहीं है। उपर्युक्त में हम देख चुके हैं कि A,B,C, D में से कोई 2 लेकर बनाए गए विभिन्न संचयों की संख्या 6 है। यदि $^4C_2$ द्वारा 4 वस्तुओं में से 2 वस्तुओं को लेकर बनाए संचयों की संख्या को व्यक्त करे तो पाते हैं, कि

$$^4C_2 = 6$$

हम यह भी जानते हैं कि 4 वस्तुओं में से 2 वस्तुओं को लेकर बनाए गए क्रमचयों की संख्या $^4P_2$ अर्थात 12 हैं।

ध्यान दीजिए कि प्रत्येक संचय से दो क्रमचयों प्राप्त किए जा सकते हैं, उदाहरणतः AB संचय से दो क्रमचय AB और BA प्राप्त होते हैं। इस प्रकार $^4C_2.\ 2! = {}^4P_2$ अर्थात

$${}^4C_2 = \frac{4P_2}{2!}$$

आइए अब हम दी गयी 4 वस्तुओं जैसे A, B, C और D में से 3 का चयन करें। सभी संभावित चयन ABC, ABD, ACD और BCD हैं। इस प्रकार 4 वस्तुओं से 3 वस्तुओं को एक साथ लेकर बनाए गए संचयों की संख्या, ${}^4C_3$ द्वारा व्यक्त है जिसका मान 4 है। परंतु 4 वस्तुओं में से 3 वस्तुएं लेकर बनाए गये क्रमचयों की संख्या कितनी है? स्पष्टतः यह ${}^4P_3$ अर्थात 24 है।

संचय	क्रमचय
ABC	ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA
ABD	ABD, ADB, BAD, BDA, DAB, DBA
ACD	ACD, ADC, CAD, CDA, DAC, DCA
BCD	BCD, BDC, CBD, CDB, DBC, DCB
${}^4C_3 = 4$	${}^4P_3 = 24$

हम देखते हैं कि प्रत्येक संचय से 6 अर्थात 3! क्रमचय प्राप्त होते हैं।

इस प्रकार $\quad {}^4C_3 \times 3! = {}^4P_3$,

अर्थात $\quad {}^4C_3 = \frac{{}^4P_3}{3!}$

व्यापकतः यदि हम n विभिन्न वस्तुओं से r वस्तुओं का चयन करते हैं, तब r वस्तुओं के प्रत्येक संचय से $r!$ क्रमचय बनते हैं। इस प्रकार ${}^nC_r$ और ${}^nP_r$ के बीच का संबंध

$${}^nC_r \times r\,! = {}^nP_r \text{, अर्थात } {}^nC_r = \frac{{}^nP_r}{r!}$$

द्वारा व्यक्त है।

सूत्र ${}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$, का प्रयोग करके हम पाते हैं कि

$${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}\ .$$

इस प्रकार हम निम्नांकित प्रमेय पाते हैं।

प्रमेय 4 n विभिन्न वस्तुओं में से r वस्तुएं एक बार लेकर बने कुल संचयों की संख्या, ^nC_r जहाँ

$$^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}, 1 \le r \le n$$

द्वारा प्राप्त होता है।

टिप्पणी

1. n वस्तुओं से सभी वस्तुओं को एक बार में लेकर बनाए गये संचयों की संख्या स्पष्टतः 1 है। इसका सत्यापन प्रमेय 4 में $r = n$ रख कर किया जा सकता है। इस प्रकार

$$^nC_n = 1 \quad (1)$$

2. n विभिन्न वस्तुओं में से r वस्तुओं के चयन के पश्चात हमारे पास शेष $(n-r)$ वस्तुएं शेष बचती हैं। अतः यह स्पष्ट है कि n विभिन्न वस्तुओं से r वस्तुओं को लेकर प्राप्त संचयों की संख्या n विभिन्न वस्तुओं में से एक बार $(n-r)$ वस्तुएं लेकर प्राप्त संचयों की संख्या के बराबर है। इस प्रकार

$$^nC_r = {^nC_{n-r}} \quad (2)$$

3. जब हम कुछ नहीं चुनते हैं तो संपूर्ण n वस्तुएं बची रहती हैं, और हम जानते हैं कि वैसा करने का केवल एक ढंग हैं। हम मान सकते हैं कि n वस्तुओं से किसी भी वस्तु को नहीं लेने पर बने संचयों की संख्या $^nC_0 = 1$ है। यदि हम ^nC_r में $r = 0$ रखते हैं तो पाते हैं, कि

$$^nC_0 = \frac{n!}{0!\,n!} = 1.$$

इस प्रकार प्रमेय 4, $r = 0$ के लिए भी सत्य है।

अब हम कुछ उदाहरणों पर विचार करते हैं।

उदाहरण 22 15 व्यक्तियों से कितने प्रकार से समितियाँ बन सकती हैं, जबकि समिति में

(i) 3 सदस्य हों?

(ii) 13 सदस्य हों?

हल

(i) 15 व्यक्तियों में से 3 सदस्यों के चुनने के तरीकों की संख्या का अर्थ है कि $^{15}C_3$ ज्ञात करना।

$$^{15}C_3 = \frac{15!}{3!(15-3)!} = \frac{15 \times 14 \times 13}{3 \times 2 \times 1} = 455$$

(ii) 15 व्यक्तियों से 13 सदस्यों के चुनने के तरीकों की संख्या का अर्थ है कि $^{15}C_{13}$ ज्ञात करना।

$$^{15}C_{13} = \frac{15!}{13!2!} = \frac{15 \times 14}{2 \times 1} = 105$$

प्रमेय 5 सिद्ध कीजिए कि $^nC_r + {^nC_{r-1}} = {^{n+1}C_r}$

हल हम जानते हैं कि

$$^nC_r + {^nC_{r-1}} = \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$$

$$= \frac{n!}{r!(n-r+1)!}[(n-r+1)+r]$$

$$= \frac{n!(n+1)}{r!(n-r+1)!} = \frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!} = {^{n+1}C_r}.$$

इस प्रमेय को **पास्कल के नियम** की संज्ञा दी जाती है।

अब उपर्युक्त प्रमेय की एक वैकल्पिक उपपत्ति देते हैं जो संचययात्मक तर्कों पर आधारित है। वास्तव में कुछ लेखक इसे संचयात्मक उपपत्ति कहते हैं।

हम स्मरण करते हैं कि $(n + 1)$ विभिन्न वस्तुओं से r वस्तुओं को एक साथ लेकर बने संचयों की संख्या $^{n+1}C_r$ है। $(n + 1)$ विभिन्न वस्तुओं में से किसी एक वस्तु पर ध्यान केंद्रित कीजिए और मान लीजिए कि उसे s द्वारा व्यक्त करते हैं। स्पष्टतः दो सम्भवनाएं हैं :

(1) यह विशिष्ट वस्तु s चयन में सम्मिलित है।

(2) s चयन में सम्मिलित नहीं है।

सम्भावना (1) के लिए, जब s चयन में सम्मिलित है, तो शेष $(r-1)$ वस्तुएं शेष $[(n+1)-1]$ अर्थात n वस्तुओं से चयनित होती हैं। इसे निस्संदेह $^nC_{r-1}$ प्रकार से कर सकते हैं।

सम्भावना (2) के लिए, जब s चयन में सम्मिलित नहीं है, स्पष्ट है कि r वस्तुएं शेष $[(n + 1) - 1]$ अर्थात n वस्तुओं से चयनित होती हैं। निस्संदेह यह ^nC_r प्रकार से हो सकता है। इस प्रकार $(n + 1)$ विभिन्न वस्तुओं से r वस्तुओं के चयन के कुल प्रकार की संख्या,

$$^{n+1}C_r = {^nC_r} + {^nC_{r-1}}$$

द्वारा व्यक्त है।

यह सूत्र पास्कल त्रिभुज (Pascal triangle) या मेरु प्रस्त्र के निर्माण में सहायक है। इसके विषय में आप अगले अध्याय में अध्ययन करेंगें।

उदाहरण 23 निम्नांकित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए।

(i) ${}^{10}C_4 + {}^{10}C_5$. (ii) ${}^{61}C_{57} - {}^{60}C_{56}$.

हल

(i) प्रमेय 5 के प्रयोग से हम पाते हैं

$${}^{10}C_4 + {}^{10}C_5 = {}^{11}C_5 = 462. \text{ (यहाँ } n = 10, r = 5)$$

(ii) पुनः प्रमेय 5 के प्रयोग द्वारा हम पाते हैं,

$${}^{60}C_{56} + {}^{60}C_{57} = {}^{61}C_{57}, \text{(यहाँ } n = 60, r = 57)$$

अर्थात् ${}^{61}C_{57} - {}^{60}C_{56} = {}^{60}C_{57} = 34220$

उदाहरण 24 7 बिन्दु एक वृत पर स्थित है। इन बिन्दुओं को मिलाने से कितनी जीवाएं बनती हैं?

हल एक वृत के दो बिन्दुओं को मिलाने से एक जीवा बनती है। इसलिए खींचीं गई जीवाओं की संख्या ${}^7C_2$ है, जिसका मान है

$${}^7C_2 = \frac{7!}{2!5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5!2!} = 21$$

इसलिए जीवाओं की कुल संख्या 21 है।

उदाहरण 25 यदि ${}^nC_9 = {}^nC_8$, तो ${}^nC_{17}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल ${}^nC_9 = {}^nC_8$ (दिया है)

या $$\frac{n!}{9!(n-9)!} = \frac{n!}{8!(n-8)!}, \text{ अर्थात } n = 17$$

अतः ${}^nC_{17} = {}^{17}C_{17} = 1$

उदाहरण 26 एक थैले में 5 काली और 6 लाल गेंदें हैं। कितने प्रकार से 3 लाल और 2 काली गेंदें थैले से निकाली जा सकती हैं?

हल 5 काली गेंदों से 2 काली गेंदें ${}^5C_2$ प्रकारों से निकाली जा सकती हैं।

ठीक इसी प्रकार 6 लाल गेंदों से 3 लाल गेंदों को निकालने के प्रकारों की संख्या ${}^6C_3$ है।

इसलिए 2 काली और 3 लाल गेंदों के निकालने के कुल प्रकारों की संख्या ${}^5C_2 \times {}^6C_3$ है (क्यों?)। अब

$${}^5C_2 \times {}^6C_3 = \frac{5!}{2!3!} \times \frac{6!}{3!3!} = 10 \times 20 = 200.$$

इस प्रकार 5 काली और 6 लाल गेंदों में से 2 काली और 3 लाल गेंदों के चयन के कुल प्रकार 200 हैं।

उदाहरण 27 7 लड़कियों और 5 लड़कों से 3 लड़कियों और 2 लडकों से बनी कितनी समितियाँ बनाई जा सकती हैं?

हल 7 लड़कियों से 3 लड़कियाँ चुनने के प्रकारों की संख्या $= {}^7C_3 = \frac{7!}{3!4!} = 35$

5 लड़कों से 2 लड़कों के चुनने के प्रकारों की संख्या $= {}^5C_2 = \frac{5!}{2!3!} = 10$

अतः इस प्रकार बनी समितियों की संख्या $= 35 \times 10 = 350$

प्रश्नावली 15.4

1. 10 खिलाड़ियों से 7 खिलाड़ियों की कितनी टीमें बन सकती हैं?
2. 8 विभिन्न पुस्तकों से 4 पुस्तकें कितने प्रकार से चुनी जा सकती हैं?
3. सुधा 11 विभिन्न प्रकार की टिकटों से कोई 9 टिकटों को चुनना चाहती है। वह कितने विभिन्न प्रकार से इन्हें चुन सकती है?
4. मान ज्ञात कीजिए,

   (i) ${}^{13}C_6 + {}^{13}C_5$ (ii) ${}^{19}C_{17} + {}^{19}C_{18}$

   (iii) ${}^{25}C_{22} - {}^{24}C_{21}$ (iv) ${}^{31}C_{26} - {}^{30}C_{26}$.
5. यदि ${}^nC_{10} = {}^nC_{12}$ है, तो n का मान ज्ञात कीजिए। इससे फिर ${}^nC_5$ का मान बताइए।
6. यदि ${}^nC_8 = {}^nC_6$ है, तो ${}^nC_2$ ज्ञात कीजिए।
7. n ज्ञात कीजिए यदि

   (i) ${}^{2n}C_3 : {}^nC_2 = 12:1$ (ii) ${}^{2n}C_3 : {}^nC_3 = 11:1$
8. सत्यापित कीजिए, $2 \times {}^7C_4 = {}^8C_4$

सिद्ध कीजिए :

9. ${}^2C_1 + {}^3C_1 + {}^4C_1 = {}^3C_2 + {}^4C_2$.
10. $1 + {}^3C_1 + {}^4C_2 = {}^5C_3$.
11. $\sum_{r=1}^{5} {}^5C_r = 31$.
12. (i) $r. {}^nC_r = n. {}^{n-1}C_{r-1}$.

    (ii) ${}^nC_r \times {}^rC_s = {}^nC_s \times {}^{n-s}C_{r-s}$.
13. यदि ${}^{n-1}C_r : {}^nC_r : {}^{n+1}C_r = 6 : 9 : 13$ हो, तो n और r ज्ञात कीजिए।

14. एक वृत पर 21 बिन्दु हैं। इन बिन्दुओं से कितनी रेखाएं खींची जा सकती है?

15. एक तल में 15 बिन्दु हैं, जिनमें कोई तीन संरेख नहीं हैं। इन्हें मिलाने से बने त्रिभुजों की संख्या ज्ञात कीजिए।

16. 12 व्यक्ति एक कक्ष में मिलते हैं प्रत्येक व्यक्ति शेष सभी व्यक्तियों से हाथ मिलाता है। इस प्रकार हुए कुल हस्थ–मिलान की संख्या ज्ञात कीजिए।

17. एक अलमारी में 7 विभिन्न गणित की पुस्तकें, 5 विभिन्न भौतिकी की पुस्तकें हैं। 3 गणित और 3 भौतिकी की पुस्तकों के कुल कितने समूह चयन किए जा सकते हैं?

18. 6 लाल गेंदों, 5 सफेद गेंदों, और 5 नीली गेंदों से 9 गेंदों के चुनने के कुल तरीकों की संख्या ज्ञात कीजिए, यदि प्रत्येक समूह में प्रत्येक रंग की 3 गेंद हैं।

19. 5 लड़कों और 4 लड़कियों में से 3 लड़कों और 3 लड़कियों की कितनी टीमें बनाई जा सकती है?

20. एक कक्षा में 3 लड़कियां और 6 लड़के हैं। 6 व्यक्तियों की एक मनोरंजन समिति बनायी जानी है, जिसमें 4 लड़के और 2 लड़कियाँ हों। कितने प्रकार से समिति बनायी जा सकती है?

21. 9 उपलब्ध पाठ्यक्रमों से जिनमें दो पाठ्यक्रम अनिवार्य है; एक छात्र 5 पाठ्यक्रमों के प्रोग्राम को कितनी विधियों से चुन सकता है?

22. 52 ताश की एक गड्डी से 5 ताश के पत्तों के कितने संचय बनाए जा सकते हैं, यदि प्रत्येक संचय में ठीक एक इक्का हो?

23. 17 क्रिकेट के खिलाड़ियों में से 11 खिलाड़ियों की टीमें कितनी विधियों से बनायी जा सकती है, ताकि प्रत्येक टीम में ठीक चार गेंदबाज हों, जबकि कुल गेंदबाजों की संख्या 5 ही है?

24. एक परीक्षा में यामिनी को प्रत्येक खण्ड से 4 प्रश्न चुनना है। प्रथम खंड, द्वितीय खंड तथा तृतीय खंड में प्रश्नों की संख्या क्रमशः 6, 7 और 8 है। कुल संभावित संचयों की संख्या ज्ञात कीजिए, जिसमें वह प्रश्नों का चयन कर सकती है।

15.6 अनुप्रयोग

पूर्व अनुभाग में हमने क्रमचय और संचय का अध्ययन किया है। इस अनुभाग में हम इन संकल्पनाओं के अनुप्रयोगों का अध्ययन करेंगें। आइए कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 28 *(गोपनीय ताला समस्या)* लोहे की आलमारियों तथा गोदामों इत्यादि में जो ताले प्रयोग में लाए जाते हैं, उन्हें गोपनीय ताले कहते हैं। वे विभिन्न प्रकार के होते हैं। उनमें से एक प्रकार के ताले में छिद्रयुक्त डायल होता है। मान लीजिए कि डायल में छिद्रों की संख्या 10 है प्रत्येक छिद्र में 0, 1, 2, ..., 9 के अंक अंकित हैं। यह ताला तभी खुल सकता है, जबकि छः अंकों की एक विशिष्ट सांकेतिक संख्या डायल की जाती है। माना कि सांकेतिक संख्या 249516 है,

जिसका अर्थ है कि ताले को खोलने के लिए पहले 2 को और तब 4 इत्यादि को क्रमानुसार डायल करना है। उन प्रयासों की अधिकतम संख्या ज्ञात कीजिए जिनसे ताला खुलने में सफलता नहीं मिलेगी।

हल सर्वप्रथम हम 0,1,2,...,9 में से कोई एक अंक को चुन सकते हैं। इस प्रकार लाख के स्थान के लिए 10 विकल्प हैं। पुनः दस हजार के स्थान के लिए 10 विकल्प हैं, और आदि आदि। इसलिए सभी 6 अंकीय संख्याओं के बनाये जाने के संभव प्रयासों की संख्या 10.10.10.10.10.10, अर्थात 10^6 होगी।

इन प्रयासों में वह सांकेतिक संख्या भी सम्मिलित है, जिसको डायल करने पर ताला खुल जाता है। अतः उन प्रयासों की अधिकतम संख्या, जिनसे ताला नहीं खुल पायेगा, 1000000 – 1 है, अर्थात 999999 है।

टिप्पणी ध्यान दीजिए कि यहाँ हम ने उन संख्याओं पर भी विचार किया है, जो शून्य से भी आरंभ होती है, यथा 023497, 000192 और 000000 आदि भी।

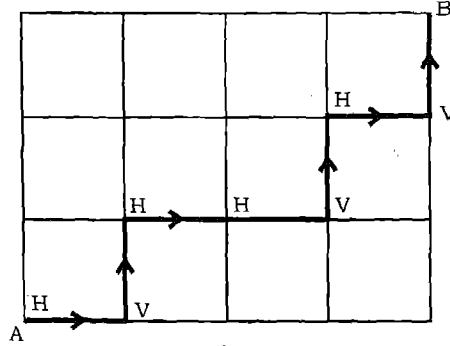
उदाहरण 29 टेलीग्राम संचार में मोर्स कोड का प्रयोग किया जाता है। इसमें अंग्रेजी वर्णमाला के सभी अक्षर, 0 से 9 तक के अंक और मात्रा चिन्हों (punctuation marks) जिनमें से प्रत्येक को सामान्यतः एक कैरेक्टर कहा जाता है, को बिन्दुओं (dots) और डैसों (dashes) द्वारा निरूपित करते हैं।

उदाहरणतः E को एक बिन्दु (.), T को एक डैस (–), O को तीन डैसों (– – –), S को तीन बिन्दुओं (...) इत्यादि द्वारा निरूपित किया जाता है। इस प्रकार SOS (...– – – ...) द्वारा निरूपित है। एक चिन्ह (डाट या डैस), दो चिन्हों, तीन चिन्हों, चार चिन्हों के प्रयोगों से कितने करेक्टरों को संचारित किया जा सकता है? यह भी ज्ञात कीजिए कि अधिकतम चार चिन्हों के प्रयोग से कुल कितने करेक्टर संचारित किए जा सकते हैं?

हल एक समय में चिन्ह (. या –) के एक बार प्रयोग से 2^1 अर्थात 2 करेक्टरों को संचारित कर सकते हैं। एक समय में दो चिन्हों के एक साथ प्रयोग से 2^2 अर्थात 4 करेक्टर (– –, . ., – ., . –) को संचारित कर सकते हैं। इसी प्रकार एक समय में तीन चिन्हों के एक साथ प्रयोग से 2^3 और 4 चिन्हों के एक साथ प्रयोग से 2^4 करेक्टर संचारित कर सकते हैं। इसी प्रकार 1, 2, 3 या 4 चिन्हों के प्रयोगों से कुल संचारित करेक्टरों की संख्या

$$= 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$$

उदाहरण 30 आकृति 15.6 में हम देखते हैं कि इसमें 4 क्षैतिज खाने (या मार्ग) और 3 ऊर्ध्व खाने (या मार्ग) है। इसे 4 × 3 **ग्रिड** (Grid) के नाम से जाना जाता है सीमा A से B तक जाना चाहती है। परंतु उसे अनुदेश है कि उसे केवल दाहिने और केवल ऊपर की ओर ही जाना है,

परन्तु क्रम आवश्यक नहीं हैं। उसके लिए संभावित मार्गों की संख्या कितनी है?

आकृति 15.6

हल माना क्षैतिज गति को, संकेत H से तथा ऊर्ध्वाधर गति को V से प्रदर्शित किया जाता है। अनुदेश, जिसका सीमा को पालन करना है, के अंतर्गत आकृति 15.6 में एक ऐसा मार्ग दिखाया गया है जो 4 H तथा 3V से बना है। वास्तव में दिए हुए अनुदेश के अंतर्गत, प्रत्येक मार्ग अवश्य ही 4H तथा 3V से बनेगा।

प्रमेय 3 के अनुप्रयोग से 4H और 3V से बनाए गए कुल विभिन्न क्रमचयों की संख्या

$$P = \frac{(4+3)!}{4!3!} = 35$$

द्वारा प्राप्त होती है।

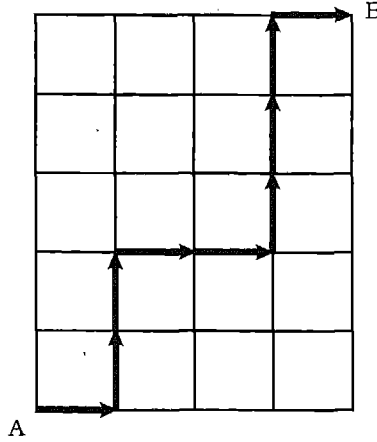
टिप्पणी इस तथ्य को $m \times n$ ग्रिड के लिए भी बढ़ाया जा सकता है।

प्रश्नावली 15.5

1. एक फैक्ट्री में उत्पादित वस्तु के लिए क्रमांक इस प्रकार बनाए जाते हैं कि उसमें पहले दो अक्षर हों तथा उसके पश्चात चार अंक (0 से 9) आएं। यदि अक्षर अंग्रेजी वर्णमाला के प्रथम छः अक्षरों से बिना पुनरावृति के लिए जाएं तथा किसी क्रमांक में अंकों की भी पुनरावृति न हो तो कितने विभिन्न क्रमांक संभावित हैं?

2. सूटकेस में एक संख्या–ताला लगा है, जिसमें तीन चक्र हैं, और प्रत्येक पर 0 से 9 तक दस अंक अंकित हैं। यदि ताले के खोलने में तीन अंक के एक विशिष्ट अनुक्रम जिसके अंक पुनरावृत नहीं है, का ही प्रयोग होना है, तो सभी संभाव्य अनुक्रमों की संख्या ज्ञात कीजिए।

3. एक ग्राहक बैंक में स्वचालित टैलर मशीन (Automatic Teller Machine) के चार अंकीय कोड को भूल जाता है। तथापि उसे याद है कि इस कोड के अंक 3, 5, 6 और 9 हैं। सही कोड को प्राप्त करने के लिए आवश्यक प्रयासों की अधिकतम संख्या ज्ञात कीजिए।

4. एक व्यक्ति को A से B तक जाना है। परंतु उसे A के केवल दाईं ओर या A के ऊपर की ओर चलने की ही (इस क्रम में आवश्यक नहीं) अनुमति है। ऐसा एक मार्ग आकृति 15.7 में दिखाया गया है। ज्ञात कीजिए कि उस व्यक्ति को A से B तक जाने के लिए कुल कितने मार्ग उपलब्ध हैं।

आकृति 15.7

5. तीन व्यक्तियों A, B और C को तीन कार्यों I, II और III को करने के लिए कितने क्रमों में सौंपा जा सकता है, यदि एक व्यक्ति को केवल एक ही कार्य दिया जाता है और सभी व्यक्ति प्रत्येक कार्य को करने में सक्षम है? कार्यों को किस क्रम में सौंपने से न्यूनतम समय लगेगा, यदि विभिन्न व्यक्तियों द्वारा प्रत्येक कार्य को करने में लगा समय (घंटों में) निम्नांकित है :

कार्य → / व्यक्ति ↓	I	II	III
A	5	4	4
B	$4\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	4
C	5	3	5

6. मोर्स कोड संबंधी उदाहरण 29 पर पुनः विचार कीजिए। कितने करैक्टर संचारित किए जा सकते हैं, जिनमें

(i) ठीक पाँच चिन्ह प्रयोग किए गए हों?

(ii) अधिकतम पाँच चिन्ह प्रयोग किए गए हों?

7. आनुवंशिक कूट (genetic code) के अध्ययन में रत एक जीव–विज्ञानविद की यह जानने में रूचि है कि एक शृंखला में 12 अणुओं (molecules) को कितने प्रकार से व्यवस्थित किया जा सकता है जबकि किसी शृंखला में 4 विभिन्न प्रकार के अणु हैं, जिन्हें पूर्वाक्षरों A [ऐडेनीन (Adenine) के लिए] C [साईटोसिन (Cytosine) के लिए], G [ग्वानीन (Guanine) के लिए] और T [थायमीन (Thymine) के लिए] द्वारा व्यक्त किया गया जाता है और प्रत्येक प्रकार के तीन अणु लिए जाते हैं। विभिन्न प्रकार के कुल कितने विन्यास संभव हैं?

(संकेत : एक ऐसा विन्यास AAACCCGGGTTT हो सकता है।)

विविध प्रश्नावली

क्रमचय और संचय पर आधारित यहाँ हम कुछ और उदाहरण देंगे जिनमें कुछ ऐसे उदाहरण भी हैं, जिनमें दोनों के प्रयोगों की आवश्यकता होती है।

उदाहरण 31 कितने प्रकार से 4 लड़कों और 3 लड़कियों को एक पंक्ति में बैठाया जा सकता है, जिससे दो लड़कियाँ साथ साथ न हों?

हल मान लीजिए कि चार लड़के B_1 , B_2, B_3 और B_4 हैं।

चूँकि दो लड़कियों को साथ नहीं बैठना है, ऐसा तभी होगा जब लड़कियाँ नीचे दिए गए '×' से अंकित स्थानों पर ही बैठायी जाएँ,

$$\times B_1 \times B_2 \times B_3 \times B_4 \times$$

ये 5 स्थान हैं, जिनपर लड़कियाँ बैठ सकती हैं। इन पर वे $^5P_3$ अर्थात 60 प्रकार से बैठ सकती हैं। साथ ही 4 लड़के निर्दिष्ट स्थानों पर $^4P_4$ अर्थात 24 प्रकार से बैठ सकते हैं।

∴ अतः लड़के व लड़कियों के बैठने के प्रकारों की अभीष्ट संख्या 60×24 अर्थात 1440 है।

उदाहरण 32 ज्ञात कीजिए कि शब्द AGAIN के सभी अक्षरों के प्रयोग से कितने शब्द बन सकते हैं। यदि इन शब्दों को शब्दकोष में लिखे जाने की तरह से लिखें तो 50 वाँ शब्द कौन सा है?

हल शब्द AGAIN के सभी अक्षरों के प्रयोग से बने कुल शब्दों की संख्या $\frac{5!}{2!1!1!} = 60$ है। (प्रमेय 3 द्वारा) A से प्रारंभ करके प्रथम शब्द AAGIN, दूसरा शब्द AAGNI इत्यादि हैं। इस प्रकार A से प्रारंभ करके और अन्य चार अक्षरों के प्रयोग से 4! अर्थात 24 शब्द बनते हैं। ये प्रथम 24 शब्द हैं। तब G से आरंभ करके और A, A, I और N को विभिन्न प्रकार से व्यवस्थित करके कुल $\frac{4!}{2!1!1!} = \frac{24}{2} = 12$ शब्द बनते हैं।

इसी प्रकार दूसरे अक्षर I से आरंभ होने वाले 12 शब्द हैं। ऐसा करने पर अब तक 48 शब्द बन चुके हैं। 49 वाँ शब्द NAAGI है। और 50 वाँ शब्द NAAIG हैं।

उदाहरण 33 3 स्वरों और 2 व्यंजनों के प्रयोग से कुल कितने शब्द INVOLUTE शब्द के अक्षरों से बनाए जा सकते है?

हल शब्द INVOLUTE में 4 स्वरों I, O, E, U और 4 व्यंजनों नामतः N, V, L और T हैं। हमें 3 स्वरों को (कुल 4 से) और 2 व्यंजनों को (कुल 4 से) चुनना है।

4 स्वरों से 3 स्वरों को चुनने के विभिन्न प्रकार $= {}^4C_3 = 4$

4 व्यंजनों से 2 व्यंजन चुनने के विभिन्न प्रकार $= {}^4C_2 = 6$

इस प्रकार 3 स्वरों और 2 व्यंजनों के कुल संचयों की संख्या 4×6 अर्थात 24 है।

अब इन 24 संचयों में से प्रत्येक में अक्षरों की संख्या 5 है, जिन्हें अपने ही बीच ${}^5P_5$ प्रकार से विन्यासित कर सकते हैं। इसलिए विभिन्न शब्दों की कुल संख्या $24 \times 5!$ अर्थात 2880 है।

उदाहरण 34 12 खिलाड़ियों के एक समूह से 8 खिलाड़ियों की एक टीम चुनी जानी है। तब इन 8 में से एक कप्तान और एक उपकप्तान चुने जाने हैं। कितने प्रकार से टीम चुनी जा सकती है?

हल 12 खिलाड़ियों के चयन के कुल ढंग ${}^{12}C_8$ अर्थात 495 हैं। कप्तान और उपकप्तान इन 8 खिलाड़ियों से ${}^8P_2$ अर्थात 56 प्रकार से चुने जा सकते हैं।

अतः चयनों की कुल संख्या 495×56 अर्थात 26720 है।

उदाहरण 35 10 प्रश्नों वाले एक गणित के प्रश्न पत्र में प्रश्नों को दो खंडों में विभक्त किया गया है और प्रत्येक खंड में प्रश्नों की संख्या बराबर है। एक विद्यार्थी को कुल 6 प्रश्नों को इस प्रकार हल करना है कि प्रत्येक खंड से कम से कम 2 प्रश्न अवश्य लिए जाए। विद्यार्थी कितने प्रकार से प्रश्नों का चयन कर सकता है?

हल छात्र को कुल छः प्रश्नों का चयन करना है, जिनमें कम से कम दो प्रश्न प्रत्येक खंड के हों। सभी संभावित विकल्प निम्नांकित हैं।

विकल्प	**खंड I**	**खंड II**
(i)	2	4
(ii)	3	3
(iii)	4	2

यदि छात्र विकल्प (i) का चयन करता है, तो उसके द्वारा प्रश्नों के चयन के कुल प्रकार ${}^5C_2 \times {}^5C_4$ हैं।

यदि छात्र विकल्प (ii) का चयन करता है, तो प्रश्नों के चयन के विभिन्न प्रकार $^5C_3 \times {}^5C_3$ हैं। इसी प्रकार (iii) के अनुसार प्रश्न चयन के विभिन्न ढंग $^5C_4 \times {}^5C_2$ हैं।

छात्र द्वारा प्रश्नों के चयन करने के विभिन्न प्रकारों की अभीष्ट संख्या

$$= ({}^5C_2 \times {}^5C_4) + ({}^5C_3 \times {}^5C_3) + ({}^5C_4 \times {}^5C_2)$$

$$= (10 \times 5) + (10 \times 10) + (5 \times 10)$$

$$= 50 + 100 + 50 = 200$$

अध्याय 15 पर विविध प्रश्नावली

1. 5 लड़कों और 3 लड़कियों को एक पंक्ति में कितने विभिन्न प्रकारों से बैठाया जा सकता है, जिनमें कोई भी दो लड़कियाँ साथ साथ नहीं बैठती हैं?

2. 5 पुरूषों और 4 महिलाओं को एक पंक्ति में इस प्रकार बैठना है कि महिलाएं सम स्थानों पर बैठें। ऐसे कितने विन्यास संभव है?

3. तीन–अंकों की कितनी सम संख्याएं ऐसी हैं, जिनमें यदि एक अंक 5 हैं, तो उससे अगला अंक 7 है?

4. 6 अंकों की कितनी संख्याएं अंकों 0,1,3,5,7, और 9 से बनायी जा सकती हैं, जब कोई अंक की पुनरावृति नहीं है? इनमें से कितने 10 से विभाज्य हैं?

5. अंकों 1,2,3 और 4 से कितनी ऐसी प्राकृत संख्याएं बनायी जा सकती हैं, जो 4321 से बड़ी न हों, यदि अंकों की पुनरावृति हो सकती हो?

6. शब्द ALGEBRA के अक्षरों को एक पंक्ति में कितने प्रकार से व्यवस्थित किया जा सकता है, यदि

(i) दो A साथ साथ हैं?

(ii) दो A साथ साथ नहीं हैं?

7. 5 लड़कियों और 5 लड़कों को एक बेन्च पर लड़कों और लड़कियों के एकान्तर क्रम में बैठाया जाना है। उनके बैठने की व्यवस्थाओं की कुल संख्या ज्ञात कीजिए। कितने विभिन्न प्रकार से वे एक गोल मेज के चारों ओर बैठ सकते हैं, जिससे लड़के और लड़कियां एकांतर क्रम में हो?

8. 8 व्यक्तियों से हम 6 व्यक्तियों को चुनना चाहते हैं, परंतु प्रतिबंध यह है कि यदि A चुना जाए तो B अवश्य चुना जाय। कितने प्रकार से चयन किया जा सकता है?

9. यदि EXAMINATION शब्द के सभी अक्षरों के विभिन्न विन्यासों को शब्दकोष की भांति सूचीबद्ध किया जाया तो सूची में E से आरंभ होने वाले प्रथम शब्द के पूर्व कुल कितने शब्द हैं?

10. एक लड़के के पास पुस्तकालय के तीन टिकट हैं और पुस्तकालय में उसकी रूचि की 8 पुस्तकें हैं। इन 8 पुस्तकों में से वह गणित खंड II को तब तक नहीं लेता है जब तक गणित खण्ड I न लिया जाय। पुस्तकालय से 3 पुस्तकों को लेने के लिए वह इनका चयन कितनी विधियों से कर सकता है?

11. खेलों के लिए दो कक्षाओं XI तथा XII में से 11 विद्यार्थियों की एक टीम इस प्रकार बनाई जानी है कि प्रत्येक कक्षा से कम से कम 5 विद्यार्थी अवश्य लिए जाएं। यदि प्रत्येक कक्षा में 25 विद्यार्थी हों, तो टीम कितने प्रकार से बनाई जा सकती है?

12. 25 छात्रों की एक कक्षा से 10 छात्रों को एक शैक्षिक पर्यटन दल के लिए चुना जाना है। तीन छात्रों ने यह निश्चय कर लिया है कि या तो वे तीनों ही जायेंगे या उनमें से कोई नहीं जायेगा। पर्यटन दल के चयन करने के विभिन्न प्रकारों की संख्या ज्ञात कर लीजिए।

13. एक छोटे से गाँव में 87 परिवार हैं। इसमें 52 परिवार ऐसे हैं कि जिसमें अधिकतम 2 बच्चे हैं। ग्रमीण विकास कार्यक्रम के अंतर्गत 20 परिवारों को चुना जाना है, जिन्हें सहायता प्रदान की जाएगी। इनमें से कम से कम 18 परिवार ऐसे होने चाहिए जिनमें अधिकतम दो बच्चे हों। सहायता के लिए कितनी विधियों से परिवारों का चुनाव हो सकता है?

14. 3 लड़कों और 3 लड़कियों को एक गोल मेज के चारों ओर इस प्रकार बैठाना है कि लड़का A के पास कोई लड़की न बैठे और लड़की B के पास कोई लड़का न बैठे। कितनी विधियों से इन्हें बैठाया जा सकता है?

15. आकृति 15.8 में 6 वर्गों की एक पट्टी दी हुई है। प्रत्येक वर्ग को 10 विभिन्न रंगों में से किसी एक द्वारा इस प्रकार रंगा जाना है, कि दो आस–पास के वर्ग एक ही रंग के न हों। पट्टी के रंगने के विभिन्न प्रकारों की संख्या ज्ञात कीजिए।

आकृति 15.8

16. एक सिनेमा हाल में तीन विवाहित दंपतियों को एक पंक्ति में जिसमें 6 सीटे हैं, बैठाना है। यदि पति पत्नी एक साथ बैठें तो वे कितने प्रकार से बिठाये जा सकते हैं?

17. एक समूह में 4 लड़कियों और 7 लड़के हैं। 5 सदस्यों की कितनी टीमें बनायी जा सकती हैं, यदि टीम में

(i) लड़कियाँ न हों?

(ii) कम से कम 1 लड़का और 1 लड़की हों?

(iii) कम से कम 3 लड़कियाँ हों?

18. 9 लड़कों और 4 लड़कियों से 7 सदस्यों की एक समिति बनाई जानी है। इसको कितने प्रकार से बनाया जा सकता है, ताकि समिति में

(i) ठीक 3 लड़कियाँ हों?

(ii) कम से कम तीन लड़कियाँ हों?

19. एक परीक्षा के एक प्रश्नपत्र में 12 प्रश्न दो खण्डों I और II में विभक्त हैं, जिनमें क्रमशः 5 और 7 प्रश्न हैं। एक विद्यार्थी को कुल 8 प्रश्न इस प्रकार करने हैं, कि प्रत्येक खण्ड से कम से कम 3 प्रश्न अवश्य किए जाएं। कितने विभिन्न प्रकारों से एक विद्यार्थी प्रश्नों का चयन कर सकता है?

20. 52 पत्तों की एक गड्डी से 5 पत्तों के कितने संचय ऐसे बनाए जा सकते हैं, कि इन पत्तों में कम से कम एक राजा हो?

21. अंग्रजी वर्णमाला में 5 स्वर और 21 व्यंजन हैं। इस वर्णमाला के दो विभिन्न स्वरों और दो विभिन्न व्यंजनों से कुल कितने शब्द बनाए जा सकते हैं?

22. n विभिन्न वस्तुओं से एक साथ r लेकर बनाए गए ऐसे क्रमचयों की संख्या ज्ञात कीजिए जिसमें दो विशिष्ट वस्तुएं साथ साथ हों?

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

भारत में क्रमचय और संचय की संकल्पना की अवधारणा जैन धर्म के अभ्युदय और संभवतः और पहले हुई है। तथापि इसका श्रेय जैनियों को ही प्राप्त है, जिन्होंने 'विकल्प' शीर्षक के अर्न्तगत इस विषय को गणित के स्वसंपन्न प्रकरण के रूप में विकसित किया।

जैनियों में **महावीर** (सन् 850 ई० के लगभग) संभवतः विश्व के प्रथम गणितज्ञ हैं, जिन्होंने क्रमचय और संचय के सूत्रों को देकर श्रेयस्कर कार्य किया।

ईसा के पूर्व छठी शताब्दी में **सुश्रुत** ने अपने औषधि विज्ञान की सुप्रसिद्ध पुस्तक **सुश्रुत–संहिता** में उद्घोषित किया कि 6 विभिन्न रसों से एक साथ एक, दो, ..., आदि लेकर 63 संचय बनाए जा सकते हैं। ईसा से तीसरी शताब्दी पूर्व एक संस्कृतविद् **पिंगल** ने दिए गए अक्षरों के समूह से एक, दो, ... इत्यादि लेकर बनाए गए संचयों की संख्या

ज्ञात करने की विधि का वर्णन अपने सुप्रसिद्ध ग्रंथ **छन्द सूत्र** में किया है। **भास्कराचार्य** (जन्म 1114 ई॰ पूर्व) ने अपनी प्रसिद्ध पुस्तक **लीलावती** में अंकपाश शीर्षक के अंतर्गत क्रमचय और संचय प्रकरण पर उत्कृष्ट कार्य किया है। **महावीर** द्वारा प्रदत्त ^nC_r और ^nP_r के सूत्रों के अतिरिक्त **भास्कराचार्य** ने विषय संबंधी अनेक प्रमेयों और परिणामों का उल्लेख किया है।

भारत के बाहर क्रमचय और संचय संबंधी प्रकरणों पर कार्य का शुभारंभ चीनी गणितज्ञों द्वारा उनकी सुप्रसिद्ध पुस्तक आई किंग (I–King – Book of Changes) में वर्णित है। इस कार्य के सन्निकटकाल को बता पाना कठिन हैं, क्योंकि 213 ई. पूर्व में तत्कालीन सम्राट ने आदेश दिया था कि सभी पुस्तकें तथा हस्तलिखित पाण्डुलिपियाँ जला दी जाएं। सौभाग्यवश इसका पूर्ण रूप से पालन नहीं हुआ। यूनानी और बाद में लैटिन गणितज्ञों ने भी क्रमचय और संचय के सिद्धान्त पर कुछ छिटपुट कार्य किये हैं।

कुछ अरबी और हेब्रो लेखकों ने भी क्रमचय और संचय की संकल्पनाओं का प्रयोग ज्योतिष के अध्ययन के लिए किया। उदाहरणतः रब्बी बेनईजरा (Rabbi ben Ezra) ने ज्ञात ग्रहों की संख्या से एक बार में एक, दो ... आदि लेकर बनाए संचयों की संख्या ज्ञात की। यह कार्य 1140 ई. पूर्व में हुआ। ऐसा प्रतीत होता है कि रब्बी बेन इजरा को ^nC_r का सूत्र ज्ञात नहीं था। तथापि बे इससे परिचित थे कि n और r के कुछ विशेष मानों के लिए $^nC_r = {^nC_{n-r}}$ होता है। 1321 ई. में हेब्रो लेखक, लेवी बेन जर्सन (Levi Ben Gerson) ने ^nP_r, ^nP_n के सूत्रों के साथ ^nC_r के व्यापक सूत्रों को बतलाया।

प्रथम ग्रंथ जिसमें क्रमचय और संचय विषय पर पूर्ण और क्रमबद्ध कार्य आर्श कन्जैक्टण्डी (Ars Conjectandi) है जिसका लेखन स्विस गणितज्ञ जैकब बरनौली (Jacob Bernoulli 1654–1705 ई.) ने किया। इसका प्रकाशन उनके मरणोपरांत 1713 ई. में हुआ। इस पुस्तक में मुख्यतः क्रमचय और संचय के सिद्धांतों का ठीक उसी प्रकार वर्णन है जैसा कि हम आजकल करते हैं।

द्विपद प्रमेय (BINOMIAL THEOREM)

अध्याय 16

16.1 भूमिका

हम पहले सीख चुके हैं कि एक द्विपद का दूसरे द्विपद से या द्विपद का स्वयं से कैसे गुणा किया जाता है। एक द्विपद का वर्ग तथा घन वास्तविक गुणा द्वारा ज्ञात करना कठिन नहीं है। उदाहरणत:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

लेकिन द्विपद के उच्च घातों को ज्ञात करने की प्रक्रिया जैसे, $(a+b)^4$, $(a+b)^{10}$, $(a+b)^{100}$, आदि अधिक कठिन हो जाती हैं। इसलिए, हम एक सूत्र पर विचार करते हैं, जिससे एक द्विपद के उच्च घात ज्ञात करने में सहयोग मिलेगा।

इस अध्याय में, हम एक महत्वपूर्ण प्रमेय जिसे द्विपद प्रमेय कहते हैं, का अध्ययन करेंगे एवं सिद्ध करेंगे कि इससे हमें $(a+b)^n$ के प्रसार की व्यापक विधि प्राप्त होती है जहाँ घातांक n एक पूर्णांक या परिमेय संख्या है। इसकी उपपत्ति में क्रमश: अध्याय 3 एवं 15 में अध्ययन किए हुए गणितीय आगमन तथा संचयात्मकी संबोधों (combinatorics) का अनुप्रयोग होगा।

16.2 धन पूर्णांकों के लिए द्विपद प्रमेय

निम्नलिखित ज्ञात सूत्रों का पुन: स्मरण कीजिए :

$$\left.\begin{aligned} (a+b)^0 &= 1 \\ (a+b)^1 &= a+b \\ (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

वास्तविक गुणा द्वारा, हम प्राप्त करते हैं,

$$\left.\begin{aligned}(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ (a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

इस प्रकार, निरंतर गुणा करने पर हम आसानी से अनुमान लगा सकते हैं कि $(a+b)^n$ के प्रसार का व्यापक सूत्र का रूप

$(a+b)^n = a^n + c_1\, a^{n-1}\, b^1 + c_2\, a^{n-2}\, b^2 + ... + c_{n-1}\, a\, b^{n-1} + b^n$ होगा ।

हमें गुणांकों $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ के ज्ञात हो जाने पर हमारे उद्‌देश्य की पूर्ति हो जाएगी। इसके लिए, सर्वप्रथम हम, (1) तथा (2) के प्रसार के गुणांकों को देखते हैं और उन्हें निम्न प्रकार से सूचीबद्ध करते हैं

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

(यह सर्वविदित **पास्कल त्रिभुज** है)

यही गुणांक संचयात्मक रूप में द्विपद गुणांक कहलाते हैं। इन्हें पुनः निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & {}^0C_0 & & & & & \\ & & & & {}^1C_0 & & {}^1C_1 & & & & \\ & & & {}^2C_0 & & {}^2C_1 & & {}^2C_2 & & & \\ & & {}^3C_0 & & {}^3C_1 & & {}^3C_2 & & {}^3C_3 & & \\ & {}^4C_0 & & {}^4C_1 & & {}^4C_2 & & {}^4C_3 & & {}^4C_4 & \\ {}^5C_0 & & {}^5C_1 & & {}^5C_2 & & {}^5C_3 & & {}^5C_4 & & {}^5C_5 \end{array}$$

टिप्पणी $^0C_0 = \frac{0!}{0!(0-0)!} = 1$

अतः, (1) तथा (2) के प्रसार पुनः निम्नांकित रूप में लिखे जा सकते हैं

$$(a + b)^0 = {}^0C_0$$
$$(a + b)^1 = {}^1C_0\, a + {}^1C_1\, b$$
$$(a + b)^2 = {}^2C_0\, a^2 + {}^2C_1\, ab + {}^2C_2\, b^2$$
$$(a + b)^3 = {}^3C_0\, a^3 + {}^3C_1\, a^2 b + {}^3C_2\, a b^2 + {}^3C_3\, b^3$$
$$(a + b)^4 = {}^4C_0\, a^4 + {}^4C_1\, a^3 b + {}^4C_2\, a^2 b^2 + {}^4C_3\, a b^3 + {}^4C_4\, b^4$$
$$(a + b)^5 = {}^5C_0\, a^5 + {}^5C_1\, a^4 b + {}^5C_2\, a^3 b^2 + {}^5C_3\, a^2 b^3 + {}^5C_4\, a b^4 + {}^5C_5\, b^5$$

इसी प्रकार निरंतर, हम आसानी से किसी धन पूर्णांक n के लिए $(a+b)^n$ का प्रसार लिख सकते हैं। इसे निम्नलिखित प्रमेय, के रूप में जाना जाता हैं जिसे द्विपद प्रमेय कहते हैं।

प्रमेय 1 (द्विपद प्रमेय) किसी धन पूर्णांक n के लिए,

$$(a+b)^n = {}^nC_0 a^n + {}^nC_1\, a^{n-1} b + {}^nC_2\, a^{n-2}\, b^2 + \ldots + {}^nC_{n-1} a\, b^{n-1} + {}^nC_n b^n$$

जहाँ $0 \leqslant r \leqslant n$ के लिए, ${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

16.2.1 उपपत्ति–गणितीय आगमन सिद्धान्त द्वारा

मान लीजिए कथन $P(n)$ निम्नलिखित है:

$(a+b)^n = {}^nC_0 a^n + {}^nC_1\, a^{n-1} b + {}^nC_2\, a^{n-2}\, b^2 + \ldots + {}^nC_{n-1} a\, b^{n-1} + {}^nC_n b^n$ जहाँ n कोई धन पूर्णांक है।

प्रथम, हम $P(1)$ की सत्यता की जाँच करते हैं। $n = 1$ लेने पर,

कथन $P(1) : (a+b)^1 = {}^1C_0\, a + {}^1C_1\, b.$

$= a + b$, जो सत्य है।

अब मान लीजिए कि $P(k)$, किसी धन पूर्णांक k के लिए सत्य है। हम सिद्ध करेंगे कि $P(k+1)$ भी सत्य है।

अब $(a+b)^{k+1} = (a+b).(a+b)^k$

$$= (a+b).[k\text{C}_0\, a^k + {}^k\text{C}_1\, a^{k-1}b + \ldots + {}^k\text{C}_{k-1}\, ab^{k-1} + {}^k\text{C}_k\, b^k]$$

(क्योंकि P(k) सत्य मान लिया गया है)

$$= {}^k\text{C}_0\, a^{k+1} + {}^k\text{C}_1\, a^k b + \ldots + {}^k\text{C}_{k-1}\, a^2 b^{k-1} + {}^k\text{C}_k\, ab^k$$
$$+ {}^k\text{C}_0\, a^k b + {}^k\text{C}_1\, a^{k-1} b^2 + \ldots + {}^kC_{k-1}\, ab^k + {}^k\text{C}_k\, b^{k+1}$$

(वास्तविक गुणा द्वारा)

$$= {}^k\text{C}_0\, a^{k+1} + ({}^k\text{C}_1 + {}^k\text{C}_0)\, a^k b + ({}^k\text{C}_2 + {}^k\text{C}_1)\, a^{k-1} b^2 + \ldots$$
$$+ ({}^k\text{C}_k + {}^k\text{C}_{k-1})\, ab^k + {}^k\text{C}_k b^{(k+1)}$$

(समान पदों के समूह बनाकर)

$$= {}^{k+1}\text{C}_0\, a^{k+1} + {}^{k+1}\text{C}_1\, a^k b + {}^{k+1}\text{C}_2\, a^{k-1} b^2 + \ldots + {}^{k+1}\text{C}_k\, ab^k + {}^{k+1}\text{C}_{k+1}\, b^{k+1}$$

निम्न का प्रयोग करते हुए

(i) ${}^{k+1}\text{C}_0 = 1 = {}^k\text{C}_0$

(ii) ${}^k\text{C}_r + {}^k\text{C}_{r-1} = {}^{k+1}\text{C}_r$

तथा (iii) ${}^{k+1}\text{C}_{k+1} = 1 = {}^k\text{C}_k$

इससे सिद्ध होता है कि यदि P(k) सत्य है तो P (k+1) सत्य है। इसलिए, गणितीय आगमन सिद्धान्त द्वारा, प्रत्येक धन पूर्णांक n के लिए P(n) सत्य है।

अतः द्विपद प्रमेय प्रत्येक धन पूर्णांक घात n के लिए सत्य है।

नोट

1. उपर्युक्त द्विपद प्रमेय घातांक $n = 0$ के लिए भी सत्य है।
2. प्रमेय का संक्षिप्त रूप इस प्रकार है . .

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}^n\text{C}_k\, a^{n-k}\, b^k . \qquad (3)$$

(3) के दाँये पक्ष में सिग्मा (Sigma) संकेतन का अर्थ

$= {}^n\text{C}_0\, a^n b^0 + {}^n\text{C}_1\, a^{n-1}\, b + \ldots + {}^n\text{C}_n\, a^{n-n} b^n$ है, जहाँ $b^0 = 1 = a^{n-n}$

विकल्पतः, द्विपद प्रमेय को संचयात्मक तर्क का प्रयोग करके भी सिद्ध किया जा सकता है जो निम्न प्रकार है :

किसी $n \in \mathrm{N}$ के लिए, लिखते हैं

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\ (a+b)\ \ldots.\ (a+b)}_{n \text{ गुणनखण्ड}} \qquad (4)$$

देखिए बंटन नियम के क्रमिक प्रयोग से हम लिख सकते हैं कि

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = (a+b)\,(a+b)$$

$$= a.a + \underbrace{a.b + b.a} + b.b.$$

$$(a+b)^3 = (a+b)\,(a+b)\,(a+b)$$

$$= a.\,a.\,a. + a.\,a.\,b + a.\,b.\,a + b.\,a.\,a + a.\,b.\,b$$

$$+ b.\,b.\,a + b.\,a.\,b + b.\,b.\,b$$

अब, व्यापक रूप से (4) के दाये पक्ष के प्रसार से हम प्रत्येक n गुणनखण्डों $(a + b)$ में से a या b के लिए एक चयन करेंगे [उदाहरणतः सभी सम्भव क्रम में हम प्रत्येक n गुणनखण्डों $(a+b)$ में से a छाँटकर $a,\ a,.\ a, \ldots, a$ का चयन और प्रथम $(n-1)$ गुणनखण्डों से a तथा शेष अन्तिम गुणनखण्ड से b छाँटकर $a\,.\,a. \ldots . a\,.\,b$ का चयन कर सकते हैं इसी तरह सभी सम्भव क्रम में $(n-2)$ गुणनखण्डों से 'a' तथा शेष दो गुणनखण्डों से 'b' का चयन करते हैं इत्यादि] चयनित क्रम में इन चयनों का गुणा करते हैं तथा सभी संभव परिणामी गुणनखण्डों को जोड़ लेते हैं।

इससे प्राप्त होता है,

$$(a+b)^n = a.\,a.\ldots\ a$$

$$+ a.\,a.\ldots a.\,b + a.\,a \ldots b.\,a + \ldots + b.\,a.\,a \ldots a$$

$$+ a.\,a \ldots a.\,b.\,b. + a.\,a \ldots .b.\,b.\,a + \ldots$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$+ a.\,b.\,b.\ldots .b + b.\,a.\,b \ldots b + \ldots + b.\,b.\ldots b.\,a.$$

$$+ b.\,b \ldots b. \qquad (5)$$

$$= \alpha_0\,a^n + \alpha_1\,a^{n-1}b + \alpha_2\,a^{n-2}\,b^2 + \ldots + \alpha_{n-1}\,a\,b^{n-1} + \alpha_n\,b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \, a^{n-k} \, b^k , \quad (6)$$

जहाँ $\alpha_0 = 1 = \alpha_n$ तथा $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ वास्तविक संख्याऐं हैं जिन्हें ज्ञात करना है।

संख्या α_k को ज्ञात करने के लिए, देखिए कि $\alpha_k (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ (5) के दायें पक्ष के पदों की संख्या है जिसमें b के k गुणनखण्ड तथा a के $(n-k)$ गुणनखण्ड हैं। वस्तुतः, संख्या α_k उन शब्दों की संख्या के बराबर है जो n अक्षरों से बने हैं जिनमें से k, b है तथा $(n-k)$, a हैं। इसलिए, अध्याय 15 की प्रमेय 3 के अनुसार

$$\alpha_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = {}^nC_k$$

है।

इस प्रकार (6) को ऐसे लिखा जा सकता है

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k \, a^{n-k} \, b^k$$

नोट द्विपद प्रमेय की उपर्युक्त संचयात्मक उपपत्ति $n = 0$ के लिए सत्यापित नहीं है, जबकि, आगमन विधि से यह उचित है।

ध्यान दीजिए :

1. $(a + b)^n$ के प्रसार में पदों की संख्या $(n + 1)$ हैं। दूसरे शब्दों में $(a + b)^n$ के प्रसार में पदों की संख्या घातांक n से एक अधिक है।
2. प्रसार के उत्तरोत्तर पदों में, a की घातें एक के क्रम से घट रही हैं, अर्थात् n से प्रारम्भ होकर, फिर $n-1, \ldots$ और अन्त में शून्य। इसके विपरीत b की घातें एक के क्रम से बढ़ रही है अर्थात् 0 से प्रारम्भ होकर, फिर $1, \ldots,$ और अन्त में n है।
3. प्रत्येक पद में a तथा b की घातों का योग n है।
4. द्विपद गुणांकों को निम्नलिखित पास्कल के त्रिभुज (जिसे **पिंगल** द्वारा प्रस्तुत **मेरूप्रस्थ** भी कहा जाता है) द्वारा स्मरण किया जा सकता है।

पास्कल त्रिभुज में हम निम्न की ओर ध्यान देते हैं :

(i) त्रिभुज की प्रत्येक पंक्ति का प्रारम्भ तथा अन्त 1 से होता है।

(ii) एक पंक्ति की कोई प्रविष्टि, पूर्व पंक्ति की दो क्रमागत प्रविष्टियों, जिनमें से एक तुरंत बाँयी ओर तथा दूसरी तुरंत दाँयी ओर है, का योगफल होती है।

द्विपद प्रमेय की कुछ विशिष्ट स्थितियाँ

1. $(a+b)^n$ के प्रसार में $a = x$ तथा $b = -y$ लेकर हम पाते हैं,

$$(x-y)^n = {}^nC_0\, x^n - {}^nC_1\, x^{n-1}y + {}^nC_2\, x^{n-2}\, y^2 - \ldots + (-1)^n\, {}^nC_n\, y^n.$$

(यहाँ ध्यान दीजिए कि प्रसार के पद एकान्तर क्रम में धनात्मक तथा ऋणात्मक हैं।)

2. $a = 1$ तथा $b = x$ लेकर, हम पाते हैं, कि

$(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1\, x + {}^nC_2\, x^2 + \ldots + {}^nC_n\, x^n.$

3. इसी प्रकार, $a = 1$ तथा $b = -x$ लेकर हम पाते हैं

$(1-x)^n = {}^nC_0 - {}^nC_1\, x + {}^nC_2\, x^2 - \ldots + (-1)^n\, {}^nC_n\, x^n.$

16.2.2 द्विपद प्रमेय में कुछ विशिष्ट पद

1. $(a+b)^n$ के प्रसार का $(r+1)$ वाँ पद ${}^nC_r\, a^{n-r}\, b^r$ है। इसे $(a+b)^n$ के प्रसार का व्यापक पद (General Term) भी कहते हैं।

2. $(a+b)^n$ के प्रसार के मध्य पद के बारे में, हम पाते हैं

(क) यदि n सम (*Even*) है तो प्रसार के पदों की संख्या $(n+1)$ एक विषम संख्या होती हैं। इसलिए मध्य पद $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वाँ पद होता है।

(ख) यदि n विषम (odd) है तो $(n+1)$ सम है। इसीलिए, प्रसार के दो मध्य पद, $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वाँ तथा $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$ वाँ होते हैं।

3. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{2n}$, जहाँ $x \neq 0$ है, के प्रसार में मध्य पद $(n+1)$ वाँ पद है, क्योंकि $2n$ सम है। यह

मध्य पद $^{2n}C_n\, x^n \left(\dfrac{1}{x}\right)^n = {}^{2n}C_n$ (अचर)

यह पद x से स्वतन्त्र पद (Independent term) {या अचर पद (Constant term)} कहलाता है।

उदाहरण 1 निम्नलिखित का प्रसार ज्ञात कीजिए :

(i) $(x + y)^5$ (ii) $(3x - 2y)^5$

(iii) $\left(x^2 + \dfrac{2}{x}\right)^4$, $x \neq 0$ (iv) $(1 - x + x^2)^4$.

हल द्विपद प्रमेय से

(i) $$(x + y)^5 = {}^5C_0\,(x)^5 + {}^5C_1(x)^4(y)^1 + {}^5C_2\,(x)^3(y)^2 + {}^5C_3\,(x)^2\,(y)^3 + {}^5C_4\,(x)^1\,(y)^4 + {}^5C_5\,(y)^5$$
$$= x^5 + 5x^4y + 10\,x^3\,y^2 + 10\,x^2\,y^3 + 5xy^4 + y^5.$$

(ii) $$(3x-2y)^5 = {}^5C_0(3x)^5 + {}^5C_1(3x)^4(-2y)^1 + {}^5C_2(3x)^3(-2y)^2 + {}^5C_3(3x)^2(-2y)^3 + {}^5C_4(3x)^1(-2y)^4 + {}^5C_5(-2y)^5$$
$$= 3^5 . x^5 + 5\cdot 3^4\cdot x^4(-2)y + 10.3^3\,x^3(-2)^2\,y^2 + 10.3^2\,x^2(-2)^3\,y^3 + 5\cdot 3x\,(-2)^4\,y^4 + (-2)^5\,y^5$$
$$= 243\,x^5 - 810x^4y + 1080x^3y^2 - 720x^2y^3 + 240xy^4 - 32y^5.$$

(iii) $$\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^4 = {}^4C_0(x^2)^4 + {}^4C_1(x^2)^3\left(\frac{2}{x}\right)^1 + {}^4C_2(x^2)^2\left(\frac{2}{x}\right)^2 + {}^4C_3(x^2)^1\left(\frac{2}{x}\right)^3 + {}^4C_4\left(\frac{2}{x}\right)^4$$
$$= x^8 + 4x^6\left(\frac{2}{x}\right) + 6x^4\left(\frac{4}{x^2}\right) + 4x^2\left(\frac{8}{x^3}\right) + \frac{16}{x^4}$$
$$= x^8 + 8\,x^5 + 24x^2 + \frac{32}{x} + \frac{16}{x^4}.$$

(iv) $y = -x + x^2$ रखने पर,

$$(1 - x + x^2)^4 = (1 + y)^4$$

$$= {}^4C_0\,(1)^4 + {}^4C_1.(1)^3.y + {}^4C_2.1^2.y^2 + {}^4C_3.1.y^3 + {}^4C_4 y^4$$

$$= 1 + 4(-x + x^2) + 6(-x + x^2)^2 + 4(-x + x^2)^3 + (-x + x^2)^4$$

$$= 1 + 4x\,(x - 1) + 6x^2\,(x - 1)^2 + 4x^3(x - 1)^3 + x^4\,(x - 1)^4$$

$$= 1 + 4x\,(x - 1) + 6x^2(x^2 - 2x + 1) + 4x^3\,(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)$$
$$+ x^4\,(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1)$$

$$= 1 + 4x^2 - 4x + 6x^4 - 12x^3 + 6x^2 + 4x^6 - 12x^5 + 12x^4$$
$$- 4x^3 + x^8 - 4x^7 + 6x^6 - 4x^5 + x^4$$

$$= 1 - 4x + 10\,x^2 - 16x^3 + 19x^4 - 16\,x^5 + 10x^6 - 4x^7 + x^8.$$

उदाहरण 2 यदि $(1 + x)^{44}$ के प्रसार में 21 वाँ तथा 22 वाँ पद समान हों तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल 21 वाँ पद $= {}^{44}C_{20}\,x^{20}$ है।

22 वाँ पद $= {}^{44}C_{21}\,x^{21}$ है।

क्योंकि दोनों पद समान हैं, हम पाते हैं

$${}^{44}C_{20}\,x^{20} = {}^{44}C_{21}\,x^{21}$$

इससे प्राप्त होता है

$$x = \frac{{}^{44}C_{20}}{{}^{44}C_{21}}$$

$$= \frac{(44)!}{(20)! \times (24)!} \times \frac{(21)! \times (23)!}{(44)!}$$

$$= \frac{(44)! \times (21) \times (20)! \times (23)!}{(20)! \times (24) \times (23)! \times (44)!}$$

$$= \frac{21}{24} = \frac{7}{8}.$$

उदाहरण 3 दिखाइए कि $(1 + x)^{2n}$ के प्रसार में मध्य पद $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n - 1)}{n!}\, 2^n\, x^n$ हैं, जहाँ n एक धन पूर्णांक है।

हल $(1+x)^{2n}$ के प्रसार में $(2n+1)$ पद हैं। अतः मध्य पद $(n+1)$ वां पद है। इस प्रकार, मध्य पद $T_{n+1} = {}^{2n}C_n (1)^{2n-n}. x^n = {}^{2n}C_n x^n$

अब

$$
\begin{aligned}
{}^{2n}C_n &= \frac{(2n)!}{n!\,n!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4 \ldots (2n-1)(2n)}{n!\ n!} \\
&= \frac{[1\cdot3\cdot5 \ldots (2n-1)]\ [2\cdot4\cdot6 \ldots (2n)]}{n!\ n!} \\
&= \frac{[1\cdot3\cdot5 \ldots (2n-1)]\cdot 2^n[1\cdot2\cdot3 \ldots n]}{n!\ n!} \\
&= \frac{1\cdot3\cdot5 \ldots (2n-1)}{n!} 2^n .
\end{aligned}
$$

इसलिए मध्य पद $\frac{1\cdot3\cdot5 \ldots (2n-1)}{n!} 2^n x^n$ है।

उदाहरण 4 ज्ञात कीजिए

(i) $(x+3)^8$ के प्रसार में x^5 का गुणांक

(ii) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{12}$ के प्रसार में x से स्वतन्त्र पद, जहाँ $x \neq 0$,

हल (i) मान लीजिए $(x+3)^8$ के प्रसार में x^5, $(r+1)$ वें पद में आता है जो ${}^8C_r . (x)^{8-r}. (3)^r$ है। तब $8-r=5$ अर्थात् $r=3$

इसलिए, प्राप्त प्रसार में x^5 का गुणांक $= {}^8C_3 (3)^3 = 1512$ है।

(ii) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{12}$ के प्रसार में $(r+1)$ वाँ पद

$$T_{r+1} = {}^{12}C_r (x)^{12-r} \left(\frac{-1}{x}\right)^r = (-1)^r\ {}^{12}C_r\, x^{12-2r}$$

x से स्वतन्त्र पद के लिए $12-2r=0$ अर्थात् $r=6$

इस प्रकार 7 वाँ पद x से स्वतन्त्र है।

इसलिए, अभीष्ट पद $= (-1)^6.\ {}^{12}C_6 = 924.$

उदाहरण 5 $(a+b)^n$ का मान ज्ञात कीजिए, यदि प्रसार के प्रथम तीन पद क्रमशः 729, 7290 तथा 30375 हैं।

हल $(a+b)^n$ के प्रथम तीन पद a^n, ${}^nC_1\, a^{n-1}\, b$ तथा ${}^nC_2\, a^{n-2}\, b^2$ हैं।

इसलिए $$a^n = 729 \quad (1)$$

$$n\, a^{n-1} b = 7290 \quad (2)$$

$$\frac{n(n-1)}{2}\, a^{n-2}\, b^2 = 30375 \quad (3)$$

(2) को (1) से तथा (3) को (2) से भाग देने पर,

$$\frac{nb}{a} = 10 \quad (4)$$

तथा $$\frac{(n-1)b}{2a} = \frac{25}{6} \quad (5)$$

(4) तथा (5) से a, b का विलोपन करने पर,

$$n = 6$$

तब (1) से $a = 3$ प्राप्त होता है जिसको (4) में प्रतिस्थापित करने पर $b = 5$ प्राप्त होता है। इसलिए, $(a+b)^n = (3+5)^6 = 8^6$

उदाहरण 6 r ज्ञात कीजिए यदि $(1+x)^{18}$ के प्रसार में $(2r+4)$ वें तथा $(r-2)$ वें पदों के गुणांक बराबर हों।

हल हम जानते हैं कि, $(2r+4)$ वाँ पद ${}^{18}C_{2r+3}\; x^{18-2r-3}$ है तथा $(r-2)$ वाँ पद ${}^{18}C_{r-3}\, x^{18-r+3}$ है। क्योंकि इन पदों के गुणांक बराबर हैं,

अतः $${}^{18}C_{2r+3} = {}^{18}C_{r-3}$$

यह तभी संभव है जबकि या तो $2r+3 = r-3$ या $2r+3+r-3 = 18$ हो

पहली दशा संभव नहीं है क्योंकि r धनात्मक होना चाहिए। दूसरी दशा से $r = 6$ प्राप्त होता है, जो अभीष्ट मान है।

उदाहरण 7 यदि $(1+a)^n$ के प्रसार में a^{r-1}, a^r तथा a^{r+1} के गुणांक समान्तर श्रेणी में हों तो सिद्ध कीजिए कि $n^2 - n(4r+1) + 4r^2 - 2 = 0$.

हल हम जानते हैं कि $(r+1)$ वाँ पद ${}^nC_r\, a^r$ है और इसका गुणांक ${}^nC_r$ है। इसलिए, a^{r-1}, a^r तथा a^{r+1} के गुणांक क्रमशः ${}^nC_{r-1}, {}^nC_r$ तथा ${}^nC_{r+1}$ हैं। परन्तु ये गुणांक समान्तर श्रेणी में हैं,

इसलिए

$$^nC_{r-1} + {}^nC_{r+1} = 2.\ ^nC_r$$

या $$\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}+\frac{n!}{(r+1)!\,(n-r-1)!} = \frac{2\times n!}{(r)\,!\,(n-r)!}$$

या $$\frac{1}{(r-1)!\,(n-r-1)!}\left[\frac{1}{(n-r)\ \ (n-r+1)}+\frac{1}{r\,(r+1)}\right]=\frac{2}{r\,(r-1)!(n-r)\,(n-r-1)!}$$

या $$\frac{1}{(n-r)\ \ (n-r+1)}+\frac{1}{r\,(r+1)} = \frac{2}{r\,(n-r)}$$

या $$\frac{r\,(r+1)\ +(n-r)\ \ (n-r+1)}{(n-r)\,(n-r+1)\,r\,(r+1)} = \frac{2}{r\,(n-r)}$$

या $$r\,(r+1)\ +(n-r)\,(n-r+1) = 2\,(r+1)\,(n-r+1)$$

या $$r^2+r+n^2-nr+n-nr+r^2-r = 2\,[\,nr-r^2+r+n-r+1]$$

$$= 2nr-2r^2+2n+2$$

या $$n^2-4\,nr-n+4r^2-2\ =0$$

अतः $$n^2-n\,(4r+1)+4r^2-2\ =0$$

प्रश्नावली 16.1

1. निम्नलिखित व्यंजकों का प्रसार कीजिए :

(i) $(1-x)^6$ (ii) $\left(\frac{2}{x}-\frac{x}{2}\right)^5$, $(x\neq 0)$

(iii) $(1+x+x^2)^3$ (iv) $\left(x-\frac{1}{y}\right)^{11}$, $(y\neq 0)$

2. गुणांक ज्ञात कीजिए

(i) $(x+y)^9$ में x^6y^3 का (ii) $(a-2b)^{12}$ में a^5b^7 का (iii) $(x+3)^9$ में x^5 का

3. निम्नांकित के प्रसार में x से स्वतन्त्र पद, $x\neq 0$, ज्ञात कीजिए –

(i) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{14}$ (ii) $\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3x}\right)^6$ (iii) $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{12}$

4. निम्नांकित के प्रसार में व्यापक पद लिखिए :

(i) $(x^2 - y)^6$ (ii) $(1 - x^2)^{12}$ (iii) $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{12}$

5. $(x - 2y)^{12}$ के प्रसार में चौथा पद ज्ञात कीजिए।

6. $(1 + a)^{m+n}$ के द्विपद प्रसार में, सिद्ध कीजिए कि a^m तथा a^n के गुणांक बराबर हैं।

7. निम्नलिखित के प्रसार में मध्य पद ज्ञात कीजिए –

(i) $\left(3 - \frac{x^3}{6}\right)^7$ (ii) $\left(\frac{x}{3} + 9y\right)^{10}$

8. $9x - \left(9x - \frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$, $x \neq 0$, के प्रसार में 13 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

9. सिद्ध कीजिए कि $(1 + x)^{2n}$ के प्रसार में x^n का गुणांक, $(1 + x)^{2n-1}$ के प्रसार में x^n के गुणांक का दुगना है।

10. यदि $(a + b)^n$ के प्रसार में 4 वें तथा 13 वें पद के गुणांक बराबर हो, तो n ज्ञात कीजिए।

11. यदि $(x + 1)^n$ के प्रसार में $(r - 1)$ वाँ, r वाँ तथा $(r + 1)$ वाँ पदों के गुणांकों में $1 : 3 : 5$ का अनुपात हो, तो n तथा r का मान ज्ञात कीजिए।

12. यदि $(1+ a)^n$ के प्रसार में तीन क्रमागत पदों के गुणांक $1 : 7 : 42$ के अनुपात में हैं, तो n का मान ज्ञात कीजिए।

13. एक द्विपद के प्रसार के प्रथम तीन पद क्रमशः 1, 10 तथा 40 हैं। प्रसार ज्ञात कीजिए।

14. $(x + a)^n$ के प्रसार के दूसरे, तीसरे तथा चौथे पद क्रमशः 240, 720 तथा 1080 हैं। n, x तथा a ज्ञात कीजिए।

15. $(x + 1)^n$ के द्विपद प्रसार के पाँचवें, छठवें तथा सातवें पदों के गुणांक समान्तर श्रेणी में हैं। n के सभी मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए यह संभव हो।

16. दिखाइए कि $(1 + x)^{2n}$ के मध्य पद का गुणांक, $(1 + x)^{2n-1}$ के दोनों मध्य पदों के गुणांकों के योग के बराबर होता है।

17. यदि $(3 + ax)^9$ के प्रसार में x^2 तथा x^3 के गुणांक समान हों तो a का मान ज्ञात कीजिए।

18. m का धनात्मक मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए $(1 + x)^m$ के प्रसार में x^2 का गुणांक 6 हो।

19. m के किस मान के लिए $(1 + x)^{10}$ के प्रसार में $(2m + 1)$ वें तथा $(4m + 5)$ वें पद के गुणांक समान होंगे।

16.3 प्रगुण एवं अनुप्रयोग

इस अनुभाग में हम द्विपद गुणांकों के कुछ प्रगुणों तथा द्विपद प्रमेय के अनुप्रयोगों उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 8 $(99)^5$ की गणना कीजिए।

हल $(a+b)^n$ के द्विपद विस्तार में $a = 100$, $b = -1$ तथा $n = 5$ रखने पर, हम पाते हैं

$$(100-1)^5 = 100^5 - {}^5C_1\, 100^4.\, 1 + {}^5C_2.\, 100^3.1^2 - {}^5C_3.100^2.\, 1^3 + {}^5C_4.100.1^4 - {}^5C_5\, .1^5$$
$$= 100^5 - 5\times 100^4 + 10\times 100^3 - 10\times 100^2 + 5\times 100 - 1$$
$$= 1001000050 - 500100001$$
$$= 9509900499$$

अतः $99^5 = 9509900499.$

उदाहरण 9 $(1.01)^{1000000}$ और 10,000 में कौन सी संख्या बड़ी है ?

हल द्विपद प्रमेय द्वारा

$$(1.01)^{1000000} = (1+.01)^{1000000}$$
$$= 1 + {}^{1000000}C_1\, (1)^{999999}.\, (0.01)^1 + \text{अन्य धनात्मक पद}$$
$$= 1 + 1000000\times 0.01 + \text{अन्य धनात्मक पद}$$
$$= 1 + 10000 + \text{अन्य धनात्मक पद}$$

अतः $(1.01)^{1000000} > 10,000$

उदाहरण 10 यदि a और b भिन्न–भिन्न पूर्णांक हों तो सिद्ध कीजिए कि $(a^n - b^n)$ का एक गुणनखण्ड $(a-b)$ है, जब कि n एक धन पूर्णांक है।

हल $a = a - b + b$ लिखिए । तब द्विपद प्रमेय द्वारा

$$a^n = (a-b+b)^n = (a-b)^n + {}^nC_1\,(a-b)^{n-1}.b + \ldots + {}^nC_{n-1}\,(a-b).\,b^{n-1} + {}^nC_n\, b^n$$

दोनों पक्षों में से b^n घटाने पर,

$$a^n - b^n = (a-b)^n + {}^nC_1\,(a-b)^{n-1}.\, b + \ldots + {}^nC_{n-1}\,(a-b).b^{n-1}$$

स्पष्टतः, दाँये पक्ष के प्रत्येक पद का $(a-b)$ एक गुणनखण्ड है।

इसलिए, $(a-b)$, $(a^n - b^n)$ का एक गुणनखण्ड है।

उदाहरण 11 सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए, सिद्ध कीजिए कि,

(i) $^nC_0 + {^nC_1} + {^nC_2} + \ldots + {^nC_n} = 2^n$

(ii) $^nC_0 + 2.{^nC_1} + \ldots + 2^n . {^nC_n} = 3^n$

हल हमें ज्ञात है

$$(a + b)^n = {^nC_0}\, a^n + {^nC_1}\, a^{n-1} . b + \ldots + {^nC_n}\, b^n$$

इसमें $a = 1 = b$ रखने पर

$$(1 + 1)^n = {^nC_0} + {^nC_1} + \ldots + {^nC_n}$$

इससे (i) सिद्ध होता है।

पुनः $a = 1$ तथा $b = 2$ लेने पर,

$$(1 + 2)^n = {^nC_0} + {^nC_1}.2 + {^nC_2} . 2^2 + \ldots + {^nC_n} . 2^n$$

इससे (ii) सिद्ध होता है।

टिप्पणी सर्वसमिका (i) से यह परिणाम भी सिद्ध होता है कि n सदस्य वाले समुच्चय A के घात समुच्चय में 2^n सदस्य होते हैं क्योंकि ^nC_r, r सदस्यों वाले समुच्चय A के उपसमुच्चयों की संख्या को प्रदर्शित करता है जहाँ r के सम्भव मान $0, 1, 2, 3. \ldots, n$ हैं।

उदाहरण 12 निम्नलिखित सर्वसमिकाओं को सिद्ध कीजिए :

(i) $^nC_0 + {^nC_2} + {^nC_4} + \ldots = 2^{(n-1)}$

(ii) $^nC_1 + {^nC_3} + {^nC_5} + \ldots = 2^{(n-1)}$

(iii) $^nC_0 + 3.{^nC_1} + 5.{^nC_2} + \ldots + (2n+1).{^nC_n} = (n+1)2^n$

(iv) $^nC_1 - 2.{^nC_2} + 3.{^nC_3} + \ldots + (-1)^{(n-1)}. n. {^nC_n} = 0$

हल $(a+b)^n$ के प्रसार में $a = 1$ तथा $b = -1$ लेने पर

$$(1 - 1)^n = {^nC_0} - {^nC_1} + {^nC_2} - {^nC_3} + \ldots$$

$$= ({^nC_0} + {^nC_2} + {^nC_4} + \ldots) - ({^nC_1} + {^nC_3} + {^nC_5} + \ldots)$$

चूँकि वाम पक्ष शून्य है, अतः

$$^nC_0 + {^nC_2} + {^nC_4} + \ldots = {^nC_1} + {^nC_3} + {^nC_5} + \ldots$$

मान लीजिए कि प्रत्येक x के बराबर है। तब

$${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \ \ldots \ = \ x + x = 2x$$

अब , उदाहरण 11 (i) से, हम पाते हैं, कि $2^n = 2x$

अतः $x = 2^{n-1}$.

इस प्रकार , (i) तथा (ii) साथ-साथ सिद्ध हो जाते हैं।

(iii) मान लीजिए $${}^nC_0 + 3.{}^nC_1 + 5.{}^nC_2 + \ldots + (2n+1).{}^nC_n = x \qquad (1)$$

सूत्र ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$ के प्रयोग से, इसे इस प्रकार लिखा जा सकता है,

$${}^nC_n + 3.{}^nC_{(n-1)} + {}^5C_{(n-2)} + \ldots + (2n+1)\,{}^nC_0 = x$$

पदों को उल्टे क्रम में लिखने पर

$$(2n+1)\,{}^nC_0 + (2n-1)\,{}^nC_1 + (2n-3)\,{}^nC_2 + \ \ldots \ + 3.{}^nC_{n-1} + {}^nC_n = x \qquad (2)$$

(1) तथा (2) को जोड़ने पर, हम पाते हैं

$$(2n+2)\,{}^nC_0 + (2n+2)\,{}^nC_1 + (2n+2)\,{}^nC_2 + \ldots + (2n+2)\,{}^nC_n = 2x$$

इससे प्राप्त होता है

$$(2n+2)\,[{}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \ \ldots \ + {}^nC_n] = 2x$$

इसलिए, उदाहरण 11 (i) के प्रयोग से, हम पाते हैं कि

$$(2n+2)\,.\,2^n = 2x \quad \text{या,} \quad x = (n+1)\,.\,2^n$$

इस प्रकार (1) की सहायता से,

$${}^nC_0 + 3.{}^nC_1 + 5.{}^nC_2 + \ldots + (2n+1).{}^nC_n = (n+1)\,2^n.$$

(iv) $${}^nC_1 - 2\,{}^nC_2 + 3\,{}^nC_3 - \ \ldots \ + (-1)^{n-1}\,n\,{}^nC_n$$

$$= n - 2 \cdot \frac{n\,(n-1)}{2} + 3 \cdot \frac{n\,(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2} - \ldots + (-1)^{n-1}\,n$$

(क्योंकि ${}^nC_n = 1$)

$$= n - n\,(n-1) + \frac{n\,(n-1)(n-2)}{2 \cdot 1} - \ldots + (-1)^{n-1}n$$

$$= n\left[1 - (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 1} - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot 1\right]$$

$= n\left[{}^{n-1}C_0 - {}^{n-1}C_1 + {}^{n-1}C_2 - \ldots + (-1)^{n-1}\ {}^{n-1}C_{n-1}\right]$

$= n.(1-1)^{(n-1)}$ [$(a+b)^{n-1}$ के प्रसार में $a=1$ तथा $b=-1$ लेने पर]

$= n.0 = 0$

इससे (iv) सिद्ध होता है।

उदाहरण 13 गुणनफल $(1+2x)^6(1-x)^7$ के प्रसार में x^5 का गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल द्विपद प्रमेय का प्रयोग करने पर

$(1+2x)^6 = {}^6C_0 + {}^6C_1(2x)^1 + {}^6C_2(2x)^2 + {}^6C_3(2x)^3 + {}^6C_4(2x)^4 + {}^6C_5(2x)^5 + {}^6C_6(2x)^6$

$= 1 + 6.(2x) + 15.(4x^2) + 20.(8x^3) + 15.(16x^4) + 6.(32x^5) + 64x^6$

$= 1 + 12x + 60x^2 + 160x^3 + 240x^4 + 192x^5 + 64x^6$

तथा $(1-x)^7 = {}^7C_0 - {}^7C_1x^1 + {}^7C_2x^2 - {}^7C_3x^3 + {}^7C_4x^4 - {}^7C_5x^5 + {}^7C_6x^6 - {}^7C_7x^7$

$= 1 - 7x + 21x^2 - 35x^3 + 35x^4 - 21x^5 + 7x^6 - x^7$

हम निम्न गुणनफल में x^5 का गुणांक ज्ञात करना चाहते हैं

$(1 + 12x + 60x^2 + 160x^3 + 240x^4 + 192x^5 + 64x^6)$

$(1 - 7x + 21x^2 - 35x^3 + 35x^4 - 21x^5 + 7x^6 - x^7)$

हमें सम्पूर्ण गुणा करने तथा सभी 56 पदों के लिखने की कोई आवश्यकता नहीं है। यह निरीक्षण करना पर्याप्त है कि गुणा के किस पद में x^5 आता है। वे इस प्रकार हैं

1. $(-21x^5) + (12x).(35x^4) + (60x^2)(-35x^3) + (160x^3)(21x^2)$

   $+ (240x^4)(-7x) + (192x^5).1$

ध्यान दीजिए कि, जब एक x^r वाले पद का गुणा x^{5-r} वाले पद में किया जाय, तो हमें x^5 वाला पद प्राप्त होता है। इस स्थिति में $r = 0, 1, 2, 3, 4$ तथा 5 के रूप में परिवर्तित होता है। इसलिए, गुणनफल में x^5 का गुणांक है

$$(-21) + (12)(35) + (60)(-35) + (160)(21) + (240)(-7) + (192) = 171$$

उदाहरण 14 यदि C_r द्विपद गुणांक ${}^nC_r$ को निरूपित करता है, सिद्ध कीजिए कि

$$C_0^2 + C_1^2 + \ldots + C_n^2 + = \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

हल हम जानते हैं कि

$$(1+x)^n = C_0 + C_1 x + \ldots + C_n x^n$$

तथा

$$(x+1)^n = C_0 x^n + C_1 x^{(n-1)} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_n.$$

इनको गुणा करने पर, हम पाते हैं

$$(1+x)^n (x+1)^n = (C_0 + C_1 x + \ldots + C_n x^n)(C_0 x^n + C_1 x^{n-1} + \ldots + C_n)$$

वास्तविक गुणा द्वारा, हम प्राप्त करते हैं

$$(1+x)^{2n} = (C_0^2 x^n + C_0 C_1 x^{n-1} + \ldots + C_0 C_n) + (C_1 C_0 x^{n+1} + C_1^2 x^n + \ldots + C_1 C_n x)$$
$$+ \ldots + (C_n C_0 x^{2n} + C_n C_1 x^{2n-1} + \ldots + C_n C_{n-1} x^{n+1} + C_n^2 x^n) \quad (1)$$

ध्यान दीजिए कि $(1+x)^{2n}$ के प्रसार में x^n का गुणांक $^{2n}C_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ है।

इसलिए, दोनों पक्षों में x^n के गुणांकों की तुलना करने पर, हम पाते हैं

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} = C_0^2 + C_1^2 + \ldots + C_n^2 .$$

इससे अभीष्ट सर्वसमिका सिद्ध हुई।

टिप्पणी (1) से और अनेक संचयात्मक सर्वसमिकायें प्राप्त की जा सकती हैं। वास्तव में, यदि हम दोनों पक्षों में x^{n-1} के गुणांकों की तुलना करें, तो पाते हैं

$$C_0C_1 + C_1C_2 + \ldots + C_{n-1}C_n = {}^{2n}C_{n-1} = \frac{2^n \cdot n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{(n+1)!} .$$

उदाहरण 15 यदि C_r, द्विपद गुणांक ^nC_r को निरूपित करता है, तो सिद्ध कीजिए कि

(i) $$C_0 C_2 + C_1 C_3 + \ldots + C_{n-2} C_n = \frac{(2n)!}{(n-2)!\,(n+2)!}, (n \ge 2)$$

(ii) $$\frac{C_1}{C_0} + 2\,\frac{C_2}{C_1} + \ldots + n\,\frac{C_n}{C_{n-1}} = \frac{n(n+1)}{2} .$$

हल हम जानते हैं कि

$$(1+x)^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n$$

तथा

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^n = C_0 + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \ldots + \frac{C_n}{x^n}.$$

इनको गुणा करने पर, हम प्राप्त करते हैं कि

$$(1+x)^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^n = (C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n) \times \left(C_0 + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \ldots + \frac{C_n}{x^n}\right).$$

वास्तविक गुणा द्वारा हम प्राप्त करते हैं कि

$$\begin{aligned}\frac{(1+x)^{2n}}{x^n} = & \left(C_0^2 + \frac{C_0 C_1}{x} + \frac{C_0 C_2}{x^2} + \ldots + \frac{C_0 C_n}{x^n}\right) \\ & + \left(C_1 C_0 x + C_1^2 + \frac{C_1 C_2}{x} + \frac{C_1 C_3}{x^2} + \ldots + \frac{C_1 C_n}{x^{n-1}}\right) + \ldots \\ & + \left(C_{n-2} C_0 x^{n-2} + C_{n-2} C_1 x^{n-3} + \ldots + \frac{C_{n-2} C_n}{x^2}\right) + \ldots \\ & + (C_n C_0 x^n + C_n C_1 x^{n-1} + \ldots + C_n^2).\end{aligned}$$

ध्यान दीजिए कि व्यंजक $\frac{(1+x)^{2n}}{x^n}$ में $\frac{1}{x^2}$ का गुणांक, $(1+x)^{2n}$ के विस्तार में $x^{(n-2)}$ का गुणांक है। यह $^{2n}C_{n-2} = \frac{(2n)!}{(n-2)!\,(n+2)!}$ है। इसलिए, दोनों पक्षों में $\frac{1}{x^2}$ के गुणांकों की तुलना करने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$C_0 C_2 + C_1 C_3 + \ldots + C_{n-2} C_n = \frac{(2n)!}{(n-2)!\,(n+2)!}.$$

इससे (i) सिद्ध होता है।

(ii) अब अनुपात $\frac{C_r}{C_{r-1}}$ पर विचार कीजिए। सरल करने पर हम प्राप्त करते हैं, कि

$$\frac{C_r}{C_{r-1}} = \frac{n-r+1}{r} \qquad \text{अर्थात्} \qquad r\frac{C_r}{C_{r-1}} = n-r+1 .$$

$r = 1, 2, \ldots, n$ रखने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{C_1}{C_0} = n , \quad 2\frac{C_2}{C_1} = n-1, \ldots, \quad n\frac{C_n}{C_{n-1}} = 1 .$$

सभी पदों को जोड़ने पर,

$$\frac{C_1}{C_0} + 2\frac{C_2}{C_1} + \ldots + n\frac{C_n}{C_{n-1}} = n + (n-1) + \ldots + 2 + 1$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \quad \left[\text{क्योंकि } 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}\right].$$

उदाहरण 16 $(a+b)^6 - (a-b)^6$ का विस्तार कीजिए। अतः $(\sqrt{2}+1)^6 - (\sqrt{2}-1)^6$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल

$$(a+b)^6 - (a-b)^6 = {}^6C_0 a^6 + {}^6C_1 a^5 b + {}^6C_2 a^4 b^2 + {}^6C_3 a^3 b^3 + {}^6C_4 a^2 b^4 + {}^6C_5 ab^5 + {}^6C_6 b^6$$

$$- {}^6C_0 a^6 + {}^6C_1 a^5 b - {}^6C_2 a^4 b^2 + {}^6C_3 a^3 b^3 - {}^6C_4 a^2 b^4 + {}^6C_5 ab^5 - {}^6C_6 b^6$$

$$= 2[{}^6C_1 a^5 b + {}^6C_3 a^3 b^3 + {}^6C_5 ab^5] \text{ (क्योंकि अन्य पद निरस्त हो जाते हैं)}$$

$$= 2[6a^5 b + 20a^3 b^3 + 6ab^5]$$

$$= 4ab(3a^4 + 10a^2 b^2 + 3b^4)$$

$a = \sqrt{2}$ तथा $b = 1$ रखने पर,

$$(\sqrt{2}+1)^6 - (\sqrt{2}-1)^6 = 4\sqrt{2}\,[3(\sqrt{2})^4 + 10(\sqrt{2})^2 + 3]$$

$$= 4\sqrt{2}\,[12 + 20 + 3]$$

$$= 140\sqrt{2}.$$

प्रश्नावली 16.2

1. द्विपद प्रमेय का प्रयोग करके निम्न मान ज्ञात कीजिए

(i) $(999)^5$ (ii) $(98)^4$ (iii) $(51)^6$ (iv) $(102)^6$

2. बताइए कौन सी संख्या बड़ी है (अपने उत्तर की व्याख्या हेतु द्विपद प्रमेय का प्रयोग कीजिए)

(i) $(1.1)^{10000}$ या 1000 (ii) $(1.2)^{4000}$ या 800

3. मान ज्ञात कीजिए (i) $(\sqrt{3}+1)^5-(\sqrt{3}-1)^5$

(ii) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^3+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^3$

4. $(1+x)^{n+1}$ का द्विपद प्रसार लिखिए जब $x=8$ हो तथा इससे प्राप्त कीजिए कि $9^{n+1}-8n-9$, 64 से विभाज्य है, जबकि n एक धन पूर्णांक है।

5. द्विपद प्रमेय का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि 6^n-5n को जब 25 से भाग दिया जाए तो सदैव 1, शेष बचता है।

6. सिद्ध कीजिए कि $\sum_{r=0}^{n} 3^r \; {}^nC_r = 4^n$

द्विपद प्रमेय का प्रयोग करके प्रश्न 7 से 15 में दी गई सर्वसमिकाएँ सिद्ध कीजिए। यहाँ C_r, ${}^nC_r$ को निरूपित करता है।

7. $(C_0+C_1)(C_1+C_2)\ldots(C_{n-1}+C_n)=\dfrac{C_0\,C_1\ldots C_{n-1}\,(n+1)^n}{n!}$

8. $C_1+2C_2+3\,C_3+\ldots+n.C_n=n\,.2^{n-1}$

9. $C_0+2C_1+3\,C_2+\ldots+(n+1)\,C_n = 2^n+n.\,2^{n-1}$

10. $C_0-\dfrac{C_1}{2}+\dfrac{C_2}{3}-\ldots = \dfrac{1}{n+1}$

11. $2C_0+2^2\,\dfrac{C_1}{2}+2^3\,\dfrac{C_2}{3}+\ldots+2^{n+1}\,\dfrac{C_n}{n+1}=\dfrac{3^{n+1}-1}{n+1}$

12. $C_0+\dfrac{C_2}{3}+\dfrac{C_4}{5}=\ldots = \dfrac{2^n}{n+1}$

13. $2.C_0+5\,C_1+8C_2+\ldots+(3n+2)\,C_n=(3n+4)\,2^{n-1}$

14. $C_0\,C_r + C_1\,C_{r+1} + \ldots + C_{n-r}\;C_n = \dfrac{(2n)!}{(n-r)!\,(n+r)!}, 0 \le r \le n.$

15. $C_2 = C_0 C_4 - C_1 C_3 + C_2^2 - C_3 C_1 + C_4 C_0$.

16.4 किसी भी घातांक के लिए द्विपद प्रमेय

अनुभाग 16.2 में, हमने द्विपद प्रमेय का अध्ययन किया जिसमें घातांक धन पूर्णांक था। इससे एक स्वाभाविक प्रश्न उठता है कि क्या द्विपद प्रमेय ऋणात्मक अथवा भिन्नात्मक घातांक के लिए भी सत्य है। इस अनुभाग में, हम इस जिज्ञासा का उत्तर देंगे और अधिक व्यापक द्विपद प्रमेय बतायेगें जिसमें घातांक का धन पूर्णांक होना आवश्यक नहीं है।

हम जानते हैं कि

$$(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1\,x + {}^nC_2 x^2 + \ldots + {}^nC_n\,x^n,$$

जहाँ n एक धन पूर्णांक है। ध्यान दीजिए कि हम घातांक n को ऋणात्मक संख्या या भिन्न से प्रतिस्थापित करें, तब संचयात्मक संख्या ${}^nC_r$ अर्थहीन हो जाती है। इस समस्या के समाधान के लिए, हम ${}^nC_r$ के स्थान पर

$$\frac{n\,(n-1)\ldots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot r}$$

लिखते हैं। इससे वास्तव में जब n एक ऋणात्मक संख्या या भिन्न हो तो भी सार्थक है।

अब हम द्विपद प्रमेय का उल्लेख करेंगे जिसमें घातांक धन पूर्णांक नहीं है अर्थात् घातांक ऋणात्मक या भिन्न है। [प्रमेय की उपपत्ति इस पुस्तक की सीमा से बाहर है]

प्रमेय 2 सूत्र

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m\,(m-1)}{1\cdot 2}\,x^2 + \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,x^3 + \ldots$$

सत्य है जब कभी $|x| < 1$ तथा m एक पूर्णांक या भिन्न है।

विशेष:

(1) ध्यान दीजिए कि प्रतिबन्ध $-1 < x < 1$ (या $|x| < 1$) आवश्यक है जब m ऋणात्मक पूर्णांक या एक भिन्न है। वास्तव में यदि $x = -2$ तथा $m = -2$ लें तो हम प्राप्त करते हैं

$$(1-2)^{-2} = 1 + (-2)(-2) + \frac{(-2)(-3)}{1\cdot 2}\,(-2)^2 + \ldots$$

या $\quad 1 = 1 + 4 + 12 + \ldots$, जो कि सम्भव नहीं है।

यह ध्यान देना महत्वपूर्ण है कि जब n एक धन पूर्णांक है, तब x पर ऐसा कोई प्रतिबन्ध नहीं है। अर्थात् प्रसार x के सभी वास्तविक मानों के लिए सत्य है।

2. ध्यान दीजिए कि $(1+x)^m$ के प्रसार में ठीक $(m+1)$ पद हैं जबकि m एक धन पूर्णांक है। लेकिन इस स्थिति में जबकि m ऋणात्मक या एक भिन्न है, पदों की संख्या अनगिनत है।

3. $(1+x)^m$ के प्रसार में व्यापक पद :

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ \ldots\ (m-r+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot r}\ x^r\ .\ \text{है}$$

यह प्रसार का $(r+1)$ वाँ पद है।

4. ध्यान दीजिए जब m एक धन पूर्णांक है, हम द्विपद प्रसार का प्रयोग करके $(1+x)^m$ के सही मान का परिकलन करते हैं। लेकिन जब m ऋणात्मक या भिन्न है तब हम $(1+x)^m$ के केवल निकटतम मान का परिकलन करते हैं क्योंकि द्विपद प्रसार के द्वारा $(1+x)^m$ का परिकलन केवल पदों की सीमित संख्या तक ही कर सकते हैं। विचार कीजिए

$$(a+b)^m = a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m$$

$$= a^m\left[1+m\left(\frac{b}{a}\right)+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{b}{a}\right)^2+\ldots\right] \text{ (प्रमेय 2 के प्रयोग से)}$$

$$= a^m + m\,a^{m-1}\cdot b+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\,a^{m-2}\cdot b^2+\ \ldots,$$

यह प्रसार सत्य है यदि $\left|\frac{b}{a}\right| < 1$ या $b < a$.

इस प्रकार

प्रमेय 3 सूत्र

$$(a+b)^m = a^m + m\,a^{m-1}\cdot b + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\,a^{m-2}\cdot b^2+\ \ldots$$

सत्य है जब कभी $b < a$ है।

टिप्पणी $(a+b)^m$ के द्विपद प्रसार में व्यापक पद या $(r+1)$ वाँ पद है

$$T_{r+1} = \frac{m(m-1)\ \ldots\ (m-r+1)}{1\cdot 2\ldots\ r}\ a^{m-r}\cdot b^r$$

द्विपद प्रसार की कुछ विशेष स्थितियाँ

हम यहाँ द्विपद प्रमेय की कुछ विशेष स्थितियाँ बतलाते हैं जहाँ $|x| < 1$ है।

1. 1. $(1+x)^{-1} = 1 + (-1)x + \frac{(-1)(-2)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 - \ldots$$

उपर्युक्त प्रसार में x को $-x$ से बदलकर, हम पाते हैं

2. $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$

3. $(1+x)^{-2} = 1 + (-2)x + \frac{(-2)(-3)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots$

$$= 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots$$

उपर्युक्त प्रसार में x को $-x$ से बदलने पर,

4. $(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^{2+} 4x^3 + \ldots$

उदाहरण 17 $\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{-1}{2}}$ का प्रसार कीजिए, जबकि $x < 2$ हो।

हल

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{-1}{2}} = 1 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{1}\left(\frac{-x}{2}\right) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1\cdot 2}\left(\frac{-x}{2}\right)^2 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{x}{4} + \frac{3x^2}{32} + \ldots .$$

उदाहरण 18 $\frac{1}{(3-4x^2)^{\frac{1}{2}}}$ के प्रसार में प्रथम चार पदों को लिखिए।

यह प्रसार x के किन मानों के लिए सत्य है ? तथा व्यापक पद क्या है ?

हल $\frac{1}{(3-4x^2)^{\frac{1}{2}}} = (3-4x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$= \left[3\left(1-\frac{4}{3}x^2\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 3^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{4}{3}x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 3^{-\frac{1}{2}}\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{4}{3}x^2\right)+\left(\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1\cdot 2}\right)\left(-\frac{4}{3}x^2\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\right)\left(-\frac{4}{3}x^2\right)^3+\ \dots.\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{3\sqrt{3}}x^2+\frac{2}{3\sqrt{3}}x^4+\frac{20}{27\sqrt{3}}x^6+\dots$$

अतः प्रसार के प्रथम चार पद हैं

$$\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{2}{3\sqrt{3}}x^2,\ \frac{2}{3\sqrt{3}}x^4,\ \frac{20}{27\sqrt{3}}x^6.$$

यह प्रसार सत्य है यदि $\left|4x^2\right| < 3$. हो, अर्थात् जब कि x का मान $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ तथा $\frac{\sqrt{3}}{2}$ के मध्य हो।

अन्त में प्रसार का व्यापक पद है

$$T_{r+1} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-r+1\right)}{\sqrt{3}\ 1\cdot 2\cdot\dots\ r}\left(-\frac{4x^2}{3}\right)^r.$$

उदाहरण 19 128 का घनमूल दशमलव के चार स्थानों तक ज्ञात कीजिए।

हल

$$(128)^{\frac{1}{3}} = (125+3)^{\frac{1}{3}}$$

$$= (125)^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{3}{125}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 5\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{125}\right)+\frac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)}{1\cdot 2}\left(\frac{3}{125}\right)^2+\frac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{3}{125}\right)^3+\dots\right]$$

$$= 5\left[1 + \frac{1}{125} + \left(-\frac{1}{9}\right)\left(\frac{3}{125}\right)^2 + \left(\frac{5}{81}\right)\left(\frac{3}{125}\right)^3 + \ldots\right]$$

$$= 5\,[\,1 + .008 - .000064 + .0000042 + \ldots\,]$$

$= 5.0397$ (दशमलव के चार स्थानों तक)

ध्यान दीजिए कि उपर्युक्त प्रसार सत्य है क्योंकि $\left|\frac{3}{125}\right| < 1$ है। यह भी ध्यान दीजिए कि हमने अन्य पदों को छोड़ दिंया है क्योंकि $\frac{3}{125}$ की उच्च घातों का दशमलव के प्रथम चार स्थानों तक कोई योगदान नहीं है।

प्रश्नावली 16.3

निम्नलिखित का प्रसार कीजिए :

1. $(1+x^4)^{-3}$, $|x|<1$.

2. $(1-2x)^{-1}$, $|x|<\frac{1}{2}$.

3. $\frac{1}{\sqrt{5+4x}}$, $x<\frac{5}{4}$.

4. $\frac{1}{(4-3x)^{\frac{1}{3}}}$, $x<\frac{4}{3}$.

5. $\frac{1}{(4-3x^2)^{\frac{1}{3}}}$ का चार पदों तक प्रसार कीजिए। x के किन मानों के लिए प्रसार सत्य है? प्रश्न 6 से 11 में दिए गए व्यंजकों का शुद्ध मान अंकित दशमलव स्थान तक ज्ञात कीजिए।

6. $(1003)^{\frac{1}{3}}$ का मान दशमलव के 5 स्थानों तक

7. $(1010)^{\frac{1}{3}}$ का मान दशमलव के 4 स्थानों तक

8. $(244)^{\frac{1}{5}}$ का मान दशमलव के 3 स्थानों तक

9. $(217)^{\frac{1}{3}}$ का मान दशमलव के 4 स्थानों तक

10. $(626)^{\frac{1}{4}}$ का मान दशमलव के 3 स्थानों तक

11. $(126)^{\frac{1}{3}}$ का मान दशमलव के 5 स्थानों तक

12. $(1-2x)^{\frac{-5}{2}}$ के प्रसार में x^6 का गुणांक ज्ञात कीजिए, $|x| < \frac{1}{2}$

13. $(1-3x^2)^{\frac{16}{3}}$ के प्रसार में 8 वाँ पद ज्ञात कीजिए, $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$

14. सिद्ध कीजिए कि $(1-4x)^{\frac{-1}{2}}$ के प्रसार में x^r का गुणांक $\frac{(2r)!}{(r!)^2}$ है।

15. $(2-3x)^{\frac{3}{2}}$ के प्रसार का व्यापक पद ज्ञात कीजिए, $|x| < \frac{2}{3}$

16. $(0.98)^{-3}$ का मान दशमलव के दो स्थानों तक ज्ञात कीजिए।

17. $(0.9)^{\frac{-1}{2}}$ का मान दशमलव के तीन स्थानों तक ज्ञात कीजिए।

18. $\frac{1}{\sqrt{47}}$ का मान दशमलव के चार स्थानों तक ज्ञात कीजिए।

19. यदि $(a+bx)^{-2}$ के सभी गुणांक धनात्मक हैं, सिद्ध कीजिए कि a तथा b विपरीत चिह्न के हैं।

20. यदि $(1+x)^m$ के प्रसार में x^2 का गुणांक 6 है तो m का ऋणात्मक मान ज्ञात कीजिए।

21. यदि $(a+bx)^{-2}$ का द्विपद प्रसार $\frac{1}{4} - 3x + \ldots$ है, तो a तथा b के मान ज्ञात कीजिए।

22. m के दो मान ज्ञात कीजिए यदि $(1-x)^m$ के प्रसार में x^2 का गुणांक 3 है।

विविध उदाहरण

उदाहरण 20 यदि $(1+x)^n$ के द्विपद प्रसार में C_1, C_2, C_3 और C_4 क्रमशः दूसरे, तीसरे, चौथे और पांचवें पदों के गुणांक हों तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{C_1}{C_1+C_2} + \frac{C_3}{C_3+C_4} = \frac{2C_2}{C_2+C_3}$$

हल हम जानते हैं कि

$$C_1 = {}^nC_1 = n$$

$$C_2 = {}^nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$C_3 = {}^nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3\times 2}$$

और $$C_4 = {}^nC_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\times 3\times 2}$$

इसलिए

$$C_1 + C_2 = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$C_2 + C_3 = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3\times 2} = \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{n+1}{3}\right)$$

और $$C_3 + C_4 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3\times 2}\left(1+\frac{n-3}{4}\right) = \frac{n(n-1)(n-2)(n+1)}{4\times 3\times 2}.$$

इस प्रकार, हम पाते हैं कि

$$\frac{C_1}{C_1+C_2} + \frac{C_3}{C_3+C_4} = \frac{2}{n+1} + \frac{4}{n+1} = \frac{6}{n+1}$$

और $$\frac{2C_2}{C_2+C_3} = \frac{6}{n+1}$$

इससे परिणाम सिद्ध होता है।

उदाहरण 21 यदि $(1+x)^{2n}$ के द्विपद प्रसार में x, x^2 तथा x^3 के गुणांक समान्तर श्रेणी में हों, तो सिद्ध कीजिए कि $2n^2 - 9n + 7 = 0$.

हल $(1+x)^{2n}$ के द्विपद प्रसार में x, x^2 तथा x^3 के गुणांक क्रमशः $2n$, $n(2n-1)$ तथा $\frac{2n(2n-1)(n-1)}{3}$ हैं।

चूँकि यह समान्तर श्रेणी में है, अतः

$$2n\cdot(2n-1) = 2n + \frac{2n(2n-1)(n-1)}{3}$$

या $\quad (2n-1) = 1 + \dfrac{(2n-1)(n-1)}{3}$

या $\quad 3\,(2n-1) = 3 + 2n^2 - 3n + 1$

या $\quad 2n^2 - 9n + 7 = 0$

उदाहरण 22 प्रत्येक $n = 1, 2, 3, \ldots,$ के लिए, सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{(1+y)^2}{(1-y)^2}$ के प्रसार में y^n का गुणांक $4n$ है।

हल $(1+y)^2 = 1 + 2y + y^2$

और $\quad \dfrac{1}{(1-y)^2} = (1-y)^{-2} = 1 + 2y + 3y^2 + \ldots$

इसलिए

$$\frac{(1+y)^2}{(1-y)^2} = (1+2y+y^2)\ (1+2y+3y^2+4y^3+\ldots+(n-1)y^{n-2} + ny^{n-1} + (n+1)y^n + \ldots)$$

में y^n वाला पद है

$$1.(n+1)\ y^n + (2y)\,(ny^{n-1}) + y^2\,.\,(n-1)\,y^{n-2}$$

इस प्रकार, y^n का गुणांक है

$$n + 1 + 2n + n - 1 \text{ अर्थात् } 4n\,.$$

उदाहरण 23 सिद्ध कीजिए कि

$$\sqrt{8} = 1 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{8} + \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{7}{12} + \ldots. \qquad (1$$

हल दायें पक्ष का व्यंजक है

$$1 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{8} + \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{7}{12} + \ldots.$$

$$= 1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2\cdot 2}\cdot\frac{1}{2\cdot 2} + \frac{3}{2\cdot 2}\cdot\frac{5}{2\cdot 2\cdot 2}\cdot\frac{7}{2\cdot 2\cdot 3} + \ldots.$$

$$= 1+\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{2}\left(\frac{1}{2^2}\right)+\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}{3\times 2}\cdot\left(\frac{1}{2^3}\right)+\ldots.$$

$$= 1+\frac{\frac{3}{2}}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}{3!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots.$$

$$= \left(1-\frac{1}{2}\right)^{\frac{-3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{8}$$

विकल्प विधि प्रश्न के दाँये पक्ष के व्यंजक (1) की तुलना $(1 + x)^n$ के प्रसार

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2\,!}x^2+\ldots$$

के दाँये पक्ष से करने पर, हम पाते हैं

$$nx = \frac{3}{4} \qquad (2)$$

$$\frac{n(n-1)}{2}x^2 = \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{8} \qquad (3)$$

(2) व (3) से n का विलोपन करने पर, हम पाते हैं $x = \frac{-1}{2}, n = \frac{-3}{2}$ अतः प्रश्न के दाँये पक्ष

(1) के व्यंजक का मान $= \left(1-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{8}$

उदाहरण 24 मान लीजिए $(x + a)^n$ के द्विपद प्रसार में विषम पदों का योग O तथा सम पदों का योग E द्वारा निरूपित है। तब सिद्ध कीजिए कि

(i) $O^2 - E^2 = (x^2 - a^2)^n$

(ii) $4\,OE = (x + a)^{2n} - (x - a)^{2n}$.

हल हम पाते हैं

$$(x + a)^n = O + E$$

$$= (T_1 + T_3 + \ldots) + (T_2 + T_4 + \ldots)$$

जहाँ $\quad T_{r+1} = {}^nC_r\, x^{n-r}\, a^r$

तथा $\quad (x-a)^n = x^n - {}^nC_1\, x^{n-1}.a^1 + {}^nC_2\, x^{n-2}.a^2 - {}^nC_3\, x^{n-3}.a^3 + \ldots$

$= T_1 - T_2 + T_3 - T_4 + - \ldots.$

$= (T_1 + T_3 + \ldots) - (T_2 + T_4 + \ldots)$

$= O - E$

इसलिए

$$(x+a)^n.(x-a)^n = (O+E)(O-E)$$

या $\quad (x^2 - a^2) = O^2 - E^2.$

इस प्रकार (i) सिद्ध होता है।

पुनः $\quad [(x+a)^n]^2 - [(x-a)^n]^2 = (O+E)^2 - (0-E)^2$

या, $\quad (x+a)^{2n} - (x-a)^{2n} = O^2 + E^2 + 2\,O.E - O^2 - E^2 + 2\,O.E = 4\,OE.$

उदाहरण 25 $\left(1+\frac{3}{4}x\right)^{\frac{13}{3}}$ के प्रसार में प्रथम ऋणात्मक पद ज्ञात कीजिए, जहाँ $0 < x < \frac{4}{3}$

हल मान लीजिए कि प्रथम ऋणात्मक पद $(r+1)$ वाँ पद है, अर्थात्

$$T_{r+1} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1\cdot 2\ldots r}\left(\frac{3}{4}x\right)^r \text{ प्रथम ऋणात्मक पद है।}$$

चूँकि $\left(\frac{3}{4}x\right)^r$, $0 < x < \frac{4}{3}$ के लिए, धनात्मक है।

r सबसे छोटा धन पूर्णांक है। जो $n - r + 1 < 0$ को संतुष्ट करता है। लेकिन $n = \frac{13}{3}$

इसलिए $r > \frac{16}{3} = 5.3$ इससे मिलता है $r = 6$ (प्रथम सबसे छोटा धन पूर्णांक)।

अतः $\left(1+\frac{3}{4}x\right)^{\frac{13}{3}}$ के प्रसार में प्रथम ऋणात्मक पद (6 +1) वाँ अर्थात् 7 वाँ जो $T_7 = \frac{-91}{36864}x^6$ है।

अध्याय 16 पर विविध प्रश्नावली

$(3x^2 - 2ax + 3a^2)^3$ का प्रसार ज्ञात कीजिए।

$(x + a)^n$ के प्रसार में अन्त से r वाँ पद ज्ञात कीजिए।

$(1 + x)^{43}$ के द्विपद प्रसार में, $(2r + 1)$ वें तथा $(r + 2)$ वें पदों के गुणांक बराबर हैं। r ज्ञात कीजिए।

यदि $(1 + x)^n$ के प्रसार के तीन क्रमागत पदों में $6 : 33 : 110$ का अनुपात हो, तो n ज्ञात कीजिए।

यदि $x = 0.001$, तो सिद्ध कीजिए

$$\frac{(1-2x)^{\frac{2}{3}}(4+5x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-x}} = 8.01$$ दशमलव के दो स्थानों तक।

परिमेय घातांक m ज्ञात कीजिए जिसके लिए $(1 + x)^m$ के प्रसार में तीसरा पद $-\frac{1}{8}x^2$ है।

यदि x आंकिक रूप से इतना छोटा है कि x^2 तथा x की उच्च घातें नगण्य हों तो सिद्ध कीजिए कि

(a) $$\frac{\left[1 + \frac{3}{4}x\right]^{-4}[16-3x]^{\frac{1}{2}}}{(8+x)^{\frac{2}{3}}} = 1 - \frac{305}{96}x$$. के निकटतम मान के बराबर है।

(b) $$\frac{(1-3x)^{\frac{1}{2}} + (4+5x)^{\frac{5}{3}}}{\sqrt{1-x}} = 8 + \frac{25}{3}x$$

यदि $\frac{(1-3x)^{\frac{1}{2}} + (1-x)^{\frac{5}{3}}}{\sqrt{4-x}}, = a + bx$ तो a तथा b ज्ञात कीजिए।

$\frac{2+x}{(3-2x)^2}$ के प्रसार के प्रथम तीन पद लिखिए।

$\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2$ के प्रसार में x^4 का गुणांक बताइए।

11. दिखाइए कि जब x आंकिक रूप से छोटा है, तब

$$\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2+1} = 1-\frac{x^2}{4}+\frac{7x^4}{64}$$

12. यदि p लगभग q के बराबर है और $n > 1$, दिखाइए कि

$$\frac{(n+1)p+(n-1)q}{(n-1)p+(n+1)q} = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{n}}$$

अतः $\left(\frac{99}{101}\right)^{\frac{1}{6}}$ का निकटतम मान बताइए।

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

प्राचीन भारतीय गणितज्ञ $(x + y)^n$, $0 \le n \le 7$, के प्रसार में गुणांकों को जानते थे। ईसा पूर्व तीसरी शताब्दी में **पिंगल** ने अपनी पुस्तक **छन्द शास्त्र** (200 ई० पू०) में इन गुणांकों को एक आकृति, जिसे **मेरूप्रस्थ** कहते हैं, के रूप में बताया। 1303 ई० में चीनी गणितज्ञ **चुशीकाई** (Chu Shi–Kie) के कार्य में भी यह त्रिभुजाकार विन्यास पाया गया। 1544 के लगभग जर्मन गणितज्ञ **माइक़ल स्टिपैल** (Michael Stipel) (1486 – 1567 ई०) ने सर्वप्रथम '*द्विपद गुणांक*' शब्द को प्रारम्भ किया। **बौम्बैली** (Bombelli) (1572 ई०) ने भी, $n = 1, 2, \ldots, 7$ के लिए तथा **औट्रेड** (Oughtred) (1631 ई०) ने $n = 1, 2, \ldots, 10$ के लिए, $(a + b)^n$ के प्रसार में गुणांकों को बताया। पिंगल के मेरूप्रस्थ के समान थोड़े परिवर्तन के साथ लिखा हुआ अंकगणितीय त्रिभुज जो पास्कल त्रिभुज के नाम से प्रचलित है, यद्यपि बहुत बाद में फ्रान्सीसी मूल के गणितज्ञ **ब्लेज़ पास्कल** (Blaise Pascal) (1623 – 1662 ई०) ने बनाया । उन्होंने द्विपद प्रसार के गुणांकों को निकालने के लिए त्रिभुज का प्रयोग किया। n के पूर्णांक मानों के लिए द्विपद प्रमेय का वर्तमान स्वरूप पास्कल द्वारा लिखी पुस्तक ***ट्रेट ड्यू ट्राइगे अरिथमेटिक*** (*Trate due triange arithmetic*) में प्रस्तुत हुआ जो 1665 में उनकी मृत्यु के बाद प्रकाशित हुई।

उसी वर्ष 1665 में द्विपद प्रमेय का व्यापक रूप ऋणात्मक पूर्णांक तथा परिमेय घातांक के लिए **सर आइज़ैक न्यूटन** (Sir Isaac Newton) (1642 – 1772 ई०) ने दिया है। यद्यपि उन्होंने इसके व्यापक रूप की उपपत्ति नहीं दी थी।

n के परिमेय मान के लिए प्रमेय की उपपत्ति **सी. मेक्लोरिन** (C. Maclaurin) (1698 – 1746 ई०) ने दी। **एम.एम. साल्वेमिनी** (M.M. Salvemini) (1708 – 1791 ई०) तथा जर्मन गणितज्ञ **ए.जी. कास्तनर** (A.G. Kastner) (1719 – 1800 ई०) ने स्वतन्त्र रूप से n के पूर्णांक मानों के लिए द्विपद प्रमेय को सिद्ध किया। 1744 ई० में प्रसिद्ध स्विस गणितज्ञ **ऐल. आयलर** (L. Euler) (1707 – 1783 ई०) ने भी भिन्न घातांकों के लिए द्विपद प्रमेय को सिद्ध किया। अन्तिम रूप से, एक पादरी के लड़के, नौर्वे के गणितज्ञ **नील्स हेनरिक अबेल** (Niels Henrik Abel) (1802 – 1829 ई०) ने द्विपद प्रमेय को सम्मिश्र संख्या घातांक के लिए सिद्ध किया।

चरघातांकी और लघुगणकीय श्रेणी

अध्याय 17

(EXPONENTIAL AND LOGARITHMIC SERIES)

17.1 भूमिका

गणित में चरघातांकी फलन तथा इसके प्रतिलोम लघुगणकीय फलनों के संबोध महत्वपूर्ण हैं। वास्तव में अपरिमेय संख्या e के विषय में विशद जानकारी के बिना इन फलनों के अध्ययन में नाममात्र प्रगति हो सकी, जबकि इन फलनों का प्रयोग मानव प्रयासों के लगभग प्रत्येक क्षेत्र में है। विशेष रूप से इनका अध्ययन विज्ञान एवं अभियांत्रिकी में यह बताने के लिये होता है कि विभिन्न राशियाँ किस प्रकार बदलती हैं।

पूर्व के अध्यायों में हमने महत्वपूर्ण श्रेणियों जैसे समान्तर (Arithmetic), गुणोत्तर (Geometric), हरात्मक (Harmonic) तथा द्विपद (Binomial) श्रेणियों का अध्ययन किया है। इस अध्याय में दो अन्य महत्वपूर्ण चरघातांकीय (Exponential) एवं लघुगणकीय (Logarithmic) श्रेणियों का परिचय करायेंगे। यहाँ हम चरघातांकी एवं लघुगणकीय फलनों की चर्चा करेंगे, और उनके गुणधर्मों की जांच करेंगे तथा उनके आलेखों पर भी विचार करेंगे।

17.2 चरघातांकी श्रेणी (Exponential Series)

संख्या e एक महान स्विस गणितज्ञ लियोनार्ड ऑयलर (Leonard Euler) (1707–1783) ने 1748 में अपनी कलन की पुस्तक में संख्या e से परिचय कराया जिस प्रकार वृत्त के अध्ययन में π महत्वपूर्ण है वैसे ही कलन में संख्या e महत्वपूर्ण है।

निम्नलिखित अनन्त श्रेणी पर विचार कीजिये:

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots \qquad (1)$$

इस श्रेणी का योग प्रतीक e से व्यक्त किया जाता है।

17.2.1 ***e* का मान 2 तथा 3 के मध्य होता है।** यह सिद्ध करने के लिये कि "e का मान 2 तथा 3 के मध्य होता है" हम देखते हैं कि

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

अर्थात् $$e - 2 = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

चूंकि $e - 2 > 0$, हम पाते हैं, कि $e > 2$.

पुनः हमें ज्ञात है कि सभी n के धनात्मक पूर्णांकों के लिये $2^{n-1} \le n!$, तथा सभी $n > 2$ के लिये $2^{n-1} < n!$.

इस प्रकार $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$, सभी $n > 2$ के लिये।

अवलोकित कीजिए $\frac{1}{3!} < \frac{1}{2^2}, \frac{1}{4!} < \frac{1}{2^3}, \ldots$

इसलिये

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$$

$$= 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\right)$$

$= 1 +$ (एक गुणोत्तर अनन्त श्रेणी जिसका सार्वानुपात $\frac{1}{2}$ है)

$$= 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3,$$

अर्थात् $e < 3$.

अतः e, 2 तथा 3 के मध्य स्थित है। दूसरे शब्दों में $2 < e < 3$.

17.2.2 ***e* एक अपरिमेय संख्या है।** हम इस परिणाम को विरोधाभास (Contradiction) विधि से सिद्ध करेंगे। यदि संभव हो तो मान लीजिए e एक परिमेय राशि है। तो हम लिख सकते हैं कि $e = \frac{p}{q}$, जहाँ p तथा $q \ne 0$ धन पूर्णांक हैं। इस प्रकार

$$e = \frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{q!} + \frac{1}{(q+1)!} + \ldots \quad (1)$$

(1) को $q!$ से गुणा करने पर,

$$q!\frac{p}{q} = q!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{q!} + \frac{1}{q!(q+1)} + ...\right),$$

अर्थात् $$q!\left(\frac{p}{q} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - ... - \frac{1}{q!}\right) = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + ... \quad (2)$$

किन्तु $$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + ... > \frac{1}{q+1}$$

तथा $$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + ... < \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + ...$$

(एक अनन्त गुणोत्तर श्रेणी जिसका सार्वानुपात $\frac{1}{q+1} < 1$)

$$= \frac{\frac{1}{q+1}}{1 - \frac{1}{q+1}} = \frac{1}{q}$$

इस प्रकार $$\frac{1}{q+1} < \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + ... < \frac{1}{q}. \quad (3)$$

इसलिये, $\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + ...$ एक उचित भिन्न है। (2) से वाम पक्ष एक पूर्णांक है जबकि दायाँ पक्ष एक उचित भिन्न है जैसा (3) में दर्शाया गया है। इससे विरोधाभास प्रगट होता है। इसलिये, e एक परिमेय राशि नहीं है। अतः, e एक अपरिमेय राशि है।

प्रेक्षण

1. श्रेणी का उपयोग करके e का मान इच्छित दशमलव स्थानों तक ज्ञात किया जा सकता है। इसका मान 15 दशमलव स्थानों तक

   $$e = 2.718281828459045$$

   दिया गया है।

   उदाहरण के लिये, e की श्रेणी के प्रथम पाँच पदों से $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$ प्राप्त होता है जो 2.7 से बड़ा है। चूंकि $e < 3$, हम पाते हैं कि $2.7 < e < 3$.

2. वह संख्या जो बीजीय नहीं है उसे अबीजीय (Transcendental) कहा जाता है। अबीजीय वर्ग में π तथा e आते हैं। इसकी उपपत्ति, कि e अबीजीय है, को प्रथम बार चार्ल्स हरमिट (Charles Hermite) ने 1873 में प्रकाशित किया था।

3. संख्या e इतनी महत्वपूर्ण है कि इसे किसी वैकल्पिक विधि से किसी संख्या के लघुगणक की परिभाषा का प्रयोग करते हुए जाँच करना उपयुक्त है। किसी आधार e पर

$\log_e 1 = 0$ क्योंकि $e^0 = 1$ तथा $\log_e e = 1$ क्योंकि $e^1 = e$.

इसलिये, e एक संख्या है जिसका लघुगणक 1 है। इन तथ्यों से निम्न का मान निकालना संभव हो जाता है

$\log\left(\frac{1}{e^2}\right) = -2$ क्योंकि $\left(\frac{1}{e^2}\right) = e^{-2}$ तथा यदि $\log x = \frac{2}{3}$, तो $x = e^{\frac{2}{3}}$.

17.2.3 पुनः, आइये एक व्यापक श्रेणी पर विचार करें

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+... \qquad (4)$$

यह श्रेणी **चरघातांकी श्रेणी** (Exponential Series) द्वारा जानी जाती है।

विशेष संदर्भ में $x = 1$, के लिये हम पाते हैं $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...$, जो वास्तव में e के बराबर है। हम श्रेणी (4) को e^x द्वारा निरूपित करते हैं।

(4) में x के स्थान पर $-x$ रखने पर हम पाते हैं

$$e^{-x} = 1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+... \qquad (5)$$

इस प्रकार $e^{-1} = 1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+....$ (6)

श्रेणियों e^x तथा e^{-x} का योग करने पर,

$$e^x + e^{-x} = \left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...\right)+\left(1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-...\right)$$

$$= 2\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...\right)$$

इस प्रकार

$$e+e^{-1} = 2\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+...\right). \qquad (7)$$

इसी प्रकार, हम पाते हैं

$$e^x - e^{-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right), \tag{8}$$

$$e^1 - e^{-1} = 2\left[1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \dots\right], \tag{9}$$

तथा
$$e^{e^x} = 1 + e^x + \frac{e^{2x}}{2!} + \frac{e^{3x}}{3!} + \dots. \tag{10}$$

उदाहरण 1 e^2 का निकटतम मान दशमलव के एक स्थान तक निकालिये।

हल हम पाते हैं

$$e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} + \frac{2^6}{6!} + \dots$$

$$= 1 + 2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{15} + \frac{4}{45} + \dots$$

$>$ सात पदों का योग $= 7.355$

दूसरे प्रकार से, हम पाते हैं

$$e^2 < \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!}\right) + \frac{2^5}{5!}\left(1 + \frac{2}{6} + \frac{2^2}{6^2} + \frac{2^3}{6^3} + \dots\right)$$

$$= 7 + \frac{4}{15}\left(1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots\right)$$

$$= 7 + \frac{4}{15}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}}\right) = 7 + \frac{2}{5} = 7.4.$$

इस प्रकार e^2, 7.355 तथा 7.4 के मध्य स्थित है। इसलिये e^2 का निकटतम मान दशमलव के एक स्थान तक 7.4 है।

उदाहरण 2 सिद्ध कीजिये कि e^{2x} की श्रेणी में x^6 का गुणांक $\frac{4}{45}$ है।

हल चरघातांकी श्रेणी

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

में x के स्थान पर $2x$ रखने पर हम पाते हैं

$$e^{2x} = 1 + \frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \dots .$$

x^6 का गुणांक $\frac{(2x)^6}{6!}$ के पद में सन्निहित है अतः अभीष्ट गुणांक है

$$\frac{2^6}{6!} = \frac{2\times2\times2\times2\times2\times2}{6\times5\times4\times3\times2\times1} = \frac{4}{45}.$$

उदाहरण 3 $\sum_{n=2}^{\infty}({}^nC_2)\frac{3^{n-2}}{n!}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल हम पाते हैं

$$\frac{({}^nC_2)3^{n-2}}{n!} = \frac{n.(n-1)}{1.2}\frac{3^{n-2}}{n!} = \frac{n(n-1)3^{n-2}}{1.2n(n-1)(n-2)!} = \frac{3^{n-2}}{2(n-2)!}$$

अतः
$$\sum_{n=2}^{\infty}({}^nC_2)\ \frac{3^{n-2}}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^{n-2}}{2(n-2)!} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \dots\right) = \frac{1}{2}e^3 .$$

उदाहरण 4 x के घात में एक श्रेणी के रूप में e^{2x+3} के विस्तार में x^2 का गुणांक ज्ञात कीजिये।

हल हम पाते हैं

$$e^{2x+3} = 1 + \frac{2x+3}{1!} + \frac{(2x+3)^2}{2!} + \dots$$

यह $2x + 3$ की एक चरघातांकी श्रेणी है न कि x की। इसका व्यापक पद $\frac{(2x+3)^n}{n!}$ है। इसे द्विपद प्रमेय द्वारा निम्न रूप में लिखा जा सकता है,

$$\frac{1}{n!}\left[3^n + {}^nC_1 3^{n-1}(2x) + {}^nC_2 3^{n-2}(2x)^2 + \dots + (2x)^n\right]$$

व्यापक पद में x^2 का गुणांक ${}^nC_2\frac{3^{n-2}2^2}{n!}$ है। अतः पूरी श्रेणी में x^2 का गुणांक

$$\sum_{n=2}^{\infty}{}^nC_2 3^{n-2}2^2/n! \text{ है।}$$

उदाहरण 3 की ही तरह हम इस योग का मान $2e^3$ पाते हैं।

अतः x के घात में e^{2x+3} के विस्तार करने पर x^2 का गुणांक $2e^3$ है।

द्वितीय विधि हम पाते हैं $e^{2x+3} = e^{2x} \times e^3 = e^3\left[1+\frac{2x}{1!}+\frac{(2x)^2}{2!}+\ldots\right]$

अतः x^2 का गुणांक $\frac{e^3 2^2}{2!} = 2e^3$ है।

उदाहरण 5 श्रेणी

$$x+\frac{(2)^2}{2!}x^2+\frac{(3)^2}{3!}x^3+\frac{(4)^2}{3!}x^4+\ldots \text{ का योग निकालिए}$$

हल ध्यान दीजिये कि श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n$ के समतुल्य है।

अंश में n^2 इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$n^2 = a_0 + a_1 n + a_2 n(n-1), \tag{1}$$

जहाँ a_0, a_1 तथा a_2 गुणांक हैं जिनका मान हमें निकालना है। (1) में दोनों पक्षों के गुणांकों की तुलना करने पर हम पाते हैं $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 1$ इस प्रकार $n^2 = n + n(n-1)$

इसलिये

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+n(n-1)}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)}{n!}x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(n-2)!}$$

$$= x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + x^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}$$

$$= xe^x + x^2e^x = (x+x^2)e^x.$$

उदाहरण 6 श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}x^n$ का योग निकालिये।

हल n^3 को निम्न रूप में रखने पर

$$n^3 = a_0 + a_1 n + a_2 n(n-1) + a_3 n(n-1)(n-2),$$

जहाँ a_0, a_1, a_2, a_3 गुणांक हैं जिन्हें ज्ञात करना है। दोनों पक्षों में गुणांकों की तुलना करने पर हम पाते हैं

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 1, \text{ इसलिये}$$

$$n^3 = n + 3n(n-1) + n(n-1)(n-2).$$

इस तथ्य का प्रयोग करने पर,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n(n-1)}{n!}x^n+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n(n-1)(n-2)}{n!}x^n$$

$$= x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+3x^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}+x^3\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^{n-3}}{(n-3)!}$$

$$= xe^x+3x^2e^x+x^3e^x = (x+3x^2+x^3)e^x.$$

ध्यान दीजिये कि पिछले उदाहरणों, में निम्न बहुपद के रूप में

$$a_0 + a_1 n + a_2 n(n-1) + \ldots + a_r n(n-1) \ldots (n-r+1),$$

जिसमें r एक धनात्मक पूर्णांक है, एक महत्वपूर्ण भूमिका अदा करता है उदाहरण 5 में $r = 2$ तथा उदाहरण 6 में $r = 3$ है। इस प्रकार की श्रेणी n में r घात का बहुपद है। ऐसे बहुपद विशेष रूप में चरघातांकी फलनों की श्रेणियों के योग के अध्ययन में बहुत उपयोगी होते हैं।

उदाहरण 7 $\sum_{n=0}^{\infty}P_r(n)\frac{x^n}{n!}$ का योग ज्ञात कीजिए जबकि $P_r(n)$, n में बहुपद r घात का है।

हल बहुपद $P_r(n)$ को निम्न रूप में निरूपित करने पर

$$P_r(n) = a_0 + a_1 n + a_2 n(n-1) + \ldots + a_r n(n-1) \ldots (n-r+1), \tag{1}$$

हम पाते हैं:

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_r(n)\frac{x^n}{n!} = a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} + a_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!} + a_2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(n-2)!}+\ldots+a_r\sum_{n=r}^{\infty}\frac{x^n}{(n-r)!}$$

$$= a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+a_1x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+a_2x^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}+\ldots+a_rx^r\sum_{n=r}^{\infty}\frac{x^{n-r}}{(n-r)!}$$

$$= (a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_rx^r)e^x. \tag{2}$$

उदाहरण 7 की विशेष स्थितियाँ

1. माना कि $r = 1$ तथा $P_1(n) = n$ तो (1) से $a_0 = 0$ तथा $a_1 = 1$. इन मानों को (2) में रखने पर हम पाते हैं :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{n!} = xe^x. \tag{3}$$

2. यदि $r = 2$ तथा $P_2(n) = n^2$ तो समीकरण (1) द्वारा हम पाते हैं $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 1$ तथा समीकरण (2) से प्राप्त योग

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n = (x + x^2)e^x, \tag{4}$$

जैसा उदाहरण 5 में दिया गया है।

3. इसी विधि से $r = 3$ के लिये,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} x^n = (x + 3x^2 + x^3)e^x, \text{ प्राप्त किया जा सकता है।} \tag{5}$$

जो कि उदाहरण 6 में प्राप्त किया गया परिणाम है। $r = 4$ के लिये, हम

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n!} x^n = (x + 7x^2 + 6x^3 + x^4)e^x, \text{ पाते हैं} \tag{6}$$

और इस प्रकार अन्य।

4. $x = 1$ के लिये, (2) की श्रेणी

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_r(n)}{n!} = (a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_r)e \text{ हो जाती है।}$$

5. माना कि

$$S_n = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3$$

$$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \text{ (परिणाम } \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \text{ का प्रयोग करने पर}$$

$$= \frac{1}{4}(n^4 + 2n^3 + n^2)$$

इसलिये

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} (n^4 + 2n^3 + n^2)\frac{x^n}{n!} = \frac{1}{4}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 x^n}{n!} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 x^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{n!}\right].$$

अब (4), (5) तथा (6) का प्रयोग करने पर,

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{4}(4x + 14x^2 + 8x^3 + x^4)e^x \tag{7}$$

6. $x = 1$ के लिये (3), (4), (5), (6) तथा (7) के रूप

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} = e, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = 2e, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} = 5e, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n!} = 15e$$

तथा $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{n!} = \frac{27}{4}e$, $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$ हो जाता है।

उदाहरण 8 श्रेणी

$$1 + \frac{2^3}{1!} + \frac{3^3}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \ldots$$ का योग निकालिये

हल श्रेणी

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n-1)!},$$

निम्न श्रेणी के समतुल्य है

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \times n^3}{n(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n!}.$$

चूंकि बहुपद n^4, n के पदों में 4 घातीय है, हम $r = 4$, (1) में रखते हैं तो

$$n^4 = P_4(n) = a_0 + a_1 n + a_2 n(n-1) + a_3 n(n-1)(n-2) + a_4 n(n-1)(n-2)(n-3)$$

प्राप्त करते हैं।

दोनों पक्ष के n^4 के गुणांकों की तुलना करने पर हम पाते हैं $a_4 = 1$। अब उसमें $n = 0,1,2$ तथा 3 रखने पर हम पाते हैं:

$$a_0 = 0, 1 = a_1, 16 = a_0 + 2a_1 + 2a_2, 81 = a_0 + 3a_1 + 6a_2 + 6a_3.$$

उपर्युक्त समीकरणों के निकाय को हल करने पर हम पाते हैं $a_0 = 0$, $a_1 = 1, a_2 = 7, a_3 = 6$ तथा $a_4 = 1$

इन मानों तथा $x = 1$ को (2) में रखने पर हम पाते हैं

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_4(n) \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{n!} = (1+7+6+1)e = 15e.$$

17.3 चरघातांकी तथा लघुगणकीय फलन

परिभाषा 1 x के सभी वास्तविक मानों के लिये आधार $a > 0, a \neq 1$ के साथ चरघातांकी फलन $f, f(x) = e^{x \log_e a}$ के द्वारा परिभाषित होता है। इसे a^x द्वारा व्यक्त किया जाता है।

a^x फलन का प्रान्त $x \in R$ तथा परिसर $y \in (0, +\infty)$ है।

यदि $a > 1$ तथा यदि x_1 तथा x_2 दो ऐसी वास्तविक संख्यायें है जब कि $x_1 < x_2$, तो $a^{x_1} < a^{x_2}$, अर्थात् $f(x_1) < f(x_2)$. इसका अर्थ है, यदि $a > 1$ तो चरघातांकी फलन $f(x) = a^x$ पूरे R पर बढ़ता है। इसी प्रकार यदि $0 < a < 1$, तो $f(x) = a^x$ पूरे R पर घटता है।

यदि $a > 0$ तथा $a \neq 1$, तो $f(x) = a^x$ एकैकी तथा आच्छादक फलन है अतः इसका प्रतिलोमी भी संभव है।

परिभाषा 2 आधार a पर चरघातांकी फलन का प्रतिलोम आधार a पर लघुगणकीय फलन कहलाता है और log_a द्वारा निरूपित किया जाता है।

चूंकि $y = f^{-1}(x)$ यदि और केवल यदि $x = f(y)$, तो log_a की परिभाषा निम्न प्रकार से व्यक्त की जा सकती है :

$$y = log_a x \text{ यदि और केवल यदि } x = a^y$$

लघुगणकीय फलन का प्रान्त चरघातांकी फलन का परिसर होता है जो कि धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है तथा लघुगणकीय फलन का परिसर, चरघातांकी फलन का प्रान्त है जो वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।

लघुगणकीय फलन की परिभाषा के फलस्वरूप,

$$a^{\log_a x} = x, \text{ प्रत्येक } x > 0 \text{ के लिये } \log_a a = 1 \text{ और } \log_a 1 = 0$$

ध्यान दीजिए

1. माना कि $y_1 = \log_e x_1$, $y_2 = \log_e x_2$ जिससे $x_1 = e^{y_1}$, $x_2 = e^{y_2}$,
   तब $y_1 + y_2 = \log_e x_1 + \log_e x_2 = \log_e x_1 x_2$, इस प्रकार,
   $$e^{y_1+y_2} = e^{\log_e x_1 x_2} = x_1 x_2 = e^{y_1} \times e^{y_2}.$$
2. विशेष रूप में, यदि हम $a = e$ लें तो $y = e^x$ यदि और केवल यदि $x = \log_e y$
3. चूंकि $f(x) = e^x$ तथा $g(x) = log\, x$ प्रतिलोम फलन है जो रेखा $y = x$ के सापेक्ष सममित है। किसी धनात्मक संख्या c के लिये हम पाते हैं $g(c) < h(c) < f(c)$, जहाँ $h(x) = x$. जैसे जैसे c के मान में वृद्धि होती है, उर्ध्वाधर दूरी $h(c) - g(c)$ तथा $f(c) - h(c)$ के मान में वृद्धि होती है। $h(x)$ की तुलना में $log\, x$ में धीरे–धीरे वृद्धि होती है तथा e^x के मान में $h(x)$ की तुलना में तेजी से वृद्धि होती है।
4. यदि $a > 0$ तथा x एक वास्तविक संख्या है तो प्राकृतिक लघुगणक को log द्वारा निरूपित करते है।
   $$a^x = e^{x\log a} = 1 + \frac{\log a}{1!}x + \frac{(\log a)^2}{2!}x^2 + \ldots$$
   a^x का विस्तार है।

5. चक्रवृद्धि ब्याज के सूत्र में चरघातांकी फलनों के अनेक अनुप्रयोग हैं, वृद्धि एवं ह्रास माडल, रिचर स्केल (Richter Scale) pH स्तर, स्वर की तीव्रता, कार्बन काल निर्धारण तथा प्राकृतिक स्रोत जिसमें राशि x में वृद्धि अथवा ह्रास की दर t समय पर उपस्थिति राशि के अनुक्रमानुपाती है। यदि प्रारम्भ में $x = x_0$ जब $t = 0$ तो इस समस्या का हल $x = x_0\, e^{kt}$ है जहाँ k एक अचल राशि है। k का धनात्मक मान चरघातांकी वृद्धि के संगत है तथा ऋणात्मक मान चरघातांकी ह्रास के संगत है।

17.4 चरघातांकी फलन का आलेख (ग्राफ)

(a) $y = 2^x$ का आलेख

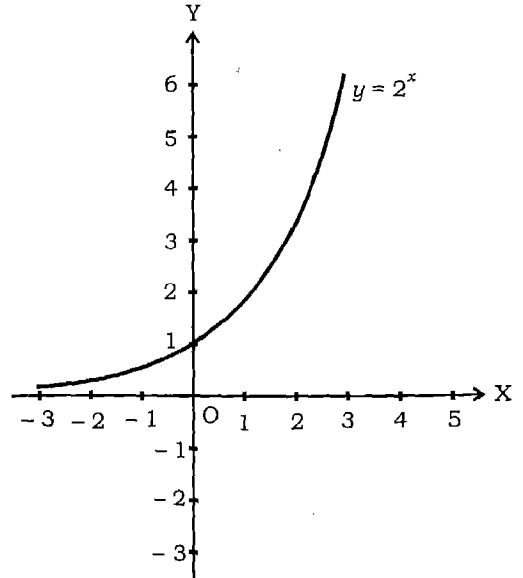
चूंकि यहाँ $a = 2 > 1$, चरघातांकी फलन पूरे R पर बढ़ता है तथा x के सभी मानों के लिये $y = 2^x > 0$, इसे हम निम्न सारणी में विशिष्ट बिन्दुओं के निर्देशांकों पर विचार करके दर्शाते हैं :

सारणी 17.1

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

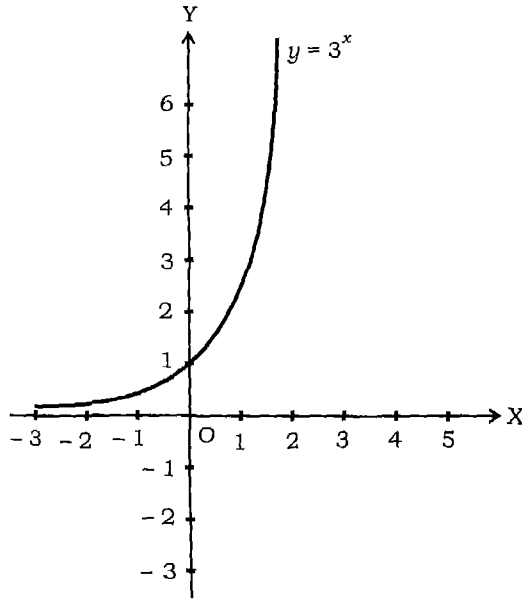
चूंकि $a > 1$, जैसे जैसे x ऋणात्मक मानों के लिए घटता है वैसे–वैसे है 2^x भी घटता है, यह x अक्ष के निकट हो जाता है किन्तु इसका छेदन नहीं करता है। फिर भी इसका y अन्तःखण्ड 1 है। $y = 2^x$ का आलेख नीचे खींचा गया है (आकृति 17.1)

(b) $y = 3^x$ का आलेख

$y = 3^x$ का आलेख ज्ञात करने के लिये हम देखते हैं कि x के सभी मानों के लिये $y = 3^x > 0$, है और इसका x–अन्तःखण्ड नहीं है बल्कि y–अन्तःखण्ड 1 है। पुनः, $x > 0$ तथा x में वृद्धि होती है तो y में तीव्रता से वृद्धि होगी किन्तु यदि x घटता है तो y के मान शून्य के निकट होते जायेंगे। आलेख आकृति 17.2 में खींचा

आकृति 17.1

गया है, इसके लिये कुछ विशिष्ट बिन्दुओं के निर्देशांकों पर विचार किया गया है जैसा कि सारणी 17.2 में दिया गया है।

सारणी 17.2

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27

आकृति 17.2

(c) $y = e^x$ का आलेख

$y = e^x$ का आलेख ज्ञात करने के लिये, हम बहुत सारे महत्वपूर्ण तथ्यों पर ध्यांन देते हैं :

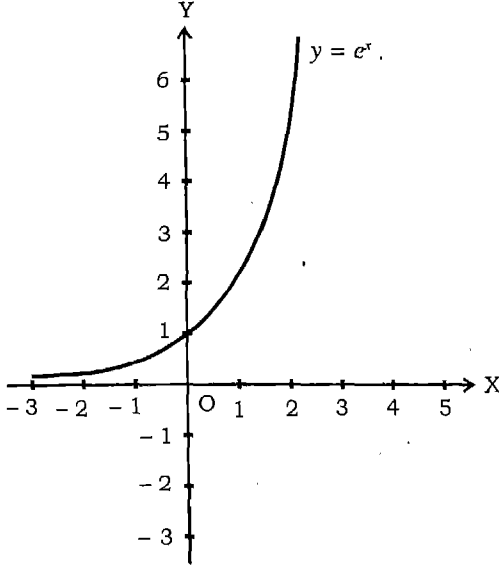
(i) जैसे जैसे x बढ़ता है वैसे वैसे y तीव्रता से बढ़ता जाता है, और जैसे जैसे x घटता है y के मान शून्य के निकट होते जाते हैं।

(ii) x-अन्तःखण्ड नहीं है क्योंकि x के किसी मान के लिये $e^x \neq 0$.

(iii) y-अन्तःखण्ड 1 है क्योंकि $e^0 = 1$ तथा $e \neq 0$

(iv) सारणी 17.3 में दिये गये विशिष्ट बिन्दु e^x के आलेख में दिशा निर्देश का कार्य करेंगे (आकृति 17.3)।

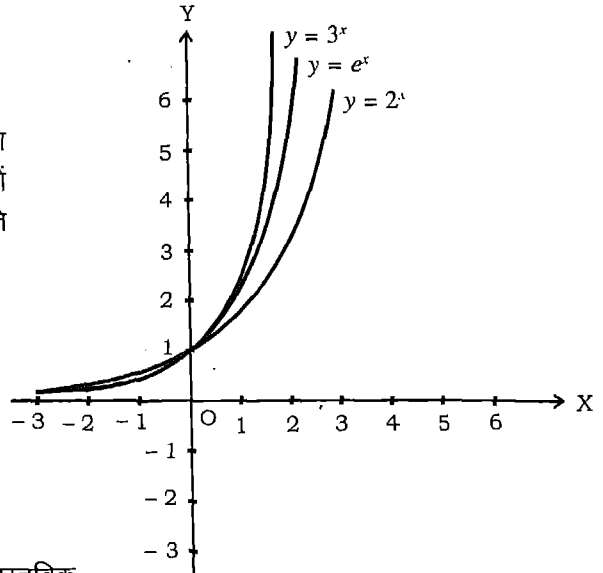
सारणी 17.3

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$y = e^x$	0.04	0.13	0.36	1.00	2.71	7.38	20.08

आकृति 17.3

आकृति 17.4

चूंकि $2 < e < 3$, $y = e^x$ का आलेख $y = 2^x$ तथा $y = 3^x$ के आलेखों के मध्य स्थित है जैसा कि आकृति 17.4 में दर्शाया गया है।

नीचे हम कुछ प्रमुख विशेषताओं को लिखते हैं :

1. x के सभी मानों के लिये $y = e^x > 0$
2. e^x का प्रान्त सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।
3. e^x का परिसर सभी धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।

4. आलेख चरघातांकी वृद्धि दर्शाता है तथा $y = 2^x$ तथा $y = 3^x$ के आलेखों के मध्य स्थित रहता है (चूंकि e एक संख्या है जो 2 तथा 3 के बीच आती है)।
5. y–अन्तःखण्ड 1 है।
6. x–अन्तःखण्ड नहीं है।
7. चरघातांकी फलन एकैकी तथा आच्छादक है।

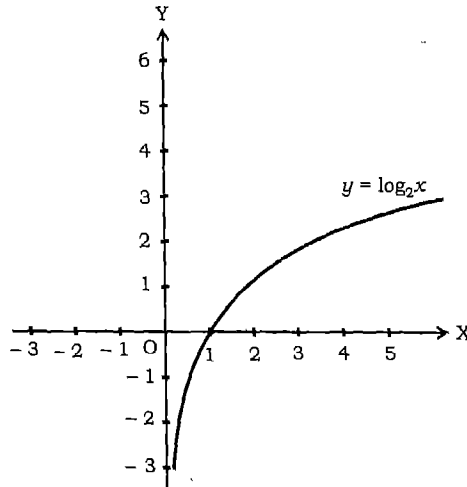
17.5 लघुगणकीय फलन का आलेख

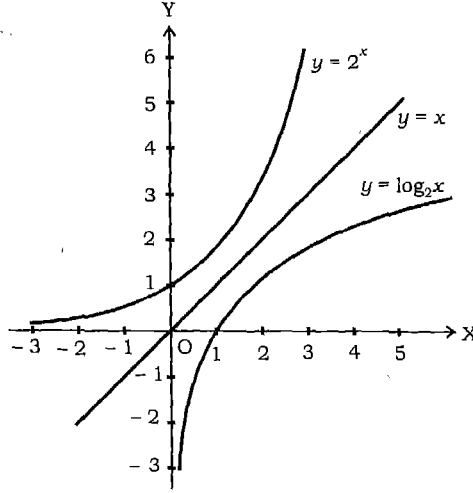
(a) $y = log_2 x$ का आलेख

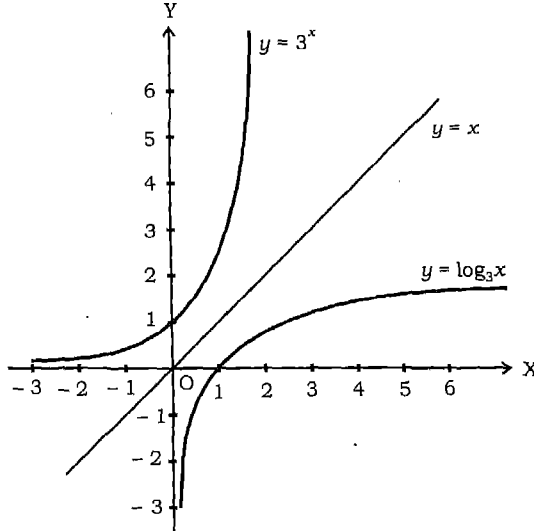
चूंकि लघुगणकीय फलन log_a आधार a पर चरघातांकी फलन का प्रतिलोम है, $y = log_a x$ का आलेख $y = x$ रेखा पर $y = a^x$ के आलेख को परावर्तित करने पर प्राप्त किया जा सकता है। $y = log_2 x$, की स्थिति में समीकरण $x = 2^y$ के प्रयोग से आलेख पर बिन्दुओं के निर्देशांक प्राप्त किये जा सकते हैं। यह सारणी 17.4 की ओर ले जाता है।

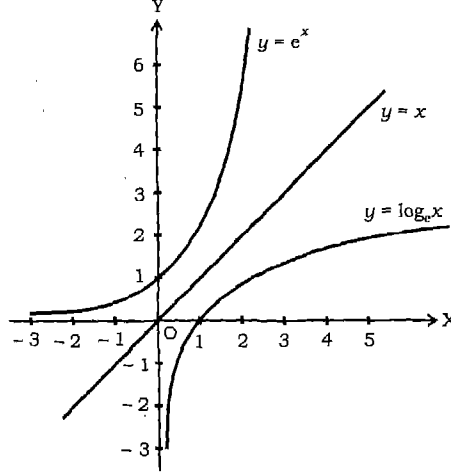
सारणी 17.4

y	-3	-2	-1	0	1	2	3
x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

चूंकि लघुगणकीय फलन केवल $x > 0$ के लिये परिभाषित है $y = \log_2 x$, का आलेख (आकृति 17.5) केवल इन्हीं x के लिये अस्तित्व में है। आलेख x अक्ष को बिन्दु $(1, 0)$ पर प्रतिच्छेदित करता है।

आकृति 17.5

चूंकि $y = 2^x$ तथा $y = \log_2 x$ प्रतिलोमी फलन हैं, इनके आलेख रेखा $y = x$ के सापेक्ष सममित है, जैसा कि आकृति 17.6 में दर्शाया गया है।

आकृति 17.6

इसी प्रकार हम $y = \log_3 x$ का आलेख खींच सकते हैं तथा पाते हैं कि $y = 3^x$ तथा $y = \log_3 x$ का आलेख रेखा $y = x$ के सापेक्ष सममित है (आकृति 17.7) क्योंकि ये भी प्रतिलोमी फलन हैं।

आकृति 17.7

देखने में $y = e^x$ का आलेख $y = 2^x$ तथा $y = 3^x$ के आलेखों जैसा है (आकृति 17.4)। इसी प्रकार $y = \log_e x$ का आलेख देखने में $y = \log_2 x$ तथा $y = \log_3 x$ के आलेखों जैसा है। चूंकि $y = e^x$ तथा $y = \log_e x$ प्रतिलोमी फलन हैं, इनके आलेख रेखा $y = x$ के सापेक्ष सममित हैं जैसा कि आकृति 17.8 में दर्शाया गया है।

आकृति 17.8

प्रश्नावली 17.1

1. दिखाइये कि $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$ [तथ्य $\frac{n^n}{n!}$ श्रेणी e^n में एक पद है का प्रयोग कीजिए]

2. श्रेणी

$$1 + (a + bx) + \frac{(a + bx)^2}{2!} + \frac{(a + bx)^3}{3!} + \ldots$$

में x^n का गुणांक ज्ञात कीजिये।

3. $\frac{a + bx + cx^2}{e^x}$ के विस्तार में x^n का गुणांक ज्ञात कीजिये।

4. x के घात के आरोही क्रम में e^{e^x} का विस्तार x^4 वाले पद तक कीजिये।

प्रश्न 5 से 14 तक प्रत्येक श्रेणी का योग ज्ञात कीजिये।

5. $(a - b) + \frac{a^2 - b^2}{2!} + \frac{a^3 - b^3}{3!} + \frac{a^4 - b^4}{4!} + \ldots$

6. $1+\frac{1+a}{2!}+\frac{(1+a+a^2)}{3!}+\frac{(1+a+a^2+a^3)}{4!}+\ldots$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{{}^nC_0+{}^nC_1+{}^nC_2+\ldots+{}^nC_n}{{}^nP_n}$

[संकेत : ${}^nC_0+{}^nC_1+{}^nC_2+\ldots+{}^nC_n=2^n$ तथा ${}^nP_n=n!$ का प्रयोग कीजिए]

8. $\frac{2}{3!}+\frac{4}{5!}+\frac{6}{7!}+\frac{8}{9!}+\ldots$

9. $\frac{1}{2!}+\frac{2^2}{3!}+\frac{3^2}{4!}+\frac{4^2}{5!}+\ldots$

10. $\frac{1^3}{1!}+\frac{2^3}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\frac{4^3}{4!}+\ldots$

11. $1+\frac{1^2+2^2}{2!}+\frac{1^2+2^2+3^2}{3!}+\ldots$

12. $\frac{2}{1!}+\frac{6}{2!}+\frac{12}{3!}+\frac{20}{4!}+\ldots$

13. $\frac{1^2\times 2}{1!}+\frac{2^2\times 3}{2!}+\frac{3^2\times 4}{3!}+\frac{4^2\times 5}{4!}$

14. $\frac{1\times 4}{0!}+\frac{2\times 5}{1!}+\frac{3\times 6}{2!}+\frac{4\times 7}{3!}+\frac{5\times 8}{4!}+\ldots$

15. यदि $\frac{e^y}{1-y}=B_0+B_1y+B_2y^2+\ldots+B_ny^n$ तो B_n-B_{n-1} का मान निकालिये।

17.6 लघुगणकीय श्रेणी (Logarithmic Series)

$\log(1+x)$ का विस्तार x के घातों में एक दूसरा महत्वपूर्ण विस्तार है। चूंकि चरघातांकी फलन एकैकी तथा आच्छादक फलन है इसका प्रतिलोमी फलन भी है। आइये हम इस प्रतिलोमी फलन के लिए श्रेणी का रूप ज्ञात करने की विधि का पुनरावलोकन करें। प्राकृत चरघातांकी फलन e^x का प्रतिलोमी, प्राकृत लघुगणकीय फलन कहा जाता है तथा इसका एक विशेष रूप $\log_e x$ या $\log x$ या $\ln x$ है। इस संभाग में, हम संख्या e को लघुगणक के आधार के रूप में लेते हैं, जब कभी आधार का स्पष्ट उल्लेख नहीं होता है।

प्रमेय यदि $|x| < 1$, तो

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$$

[दायें पक्ष की श्रेणी ***लघुगणकीय श्रेणी*** कहलाती है।]

उपपत्ति चूंकि प्रत्येक धनात्मक संख्या k को $e^{\log k}$ के रूप में लिखा जा सकता है जिससे हमें निम्न यह सर्वसमिका मिलती है

$$(1+x)^y = e^{\log(1+x)^y} = e^{y\log(1+x)}$$

दायें पक्ष का विस्तार करने पर, हमें मिलता है

$$e^{y\log(1+x)} = 1 + y\log(1+x) + \frac{y^2}{2!}[\log(1+x)]^2 + \ldots \quad (1)$$

द्विपद प्रमेय से बायाँ पक्ष निम्न रूप में मिलता है

$$(1+x)^y = 1 + \frac{yx}{1!} + \frac{y(y-1)}{2!}x^2 + \frac{y(y-1)(y-2)}{3!}x^3 + \frac{y(y-1)(y-2)(y-3)}{4!}x^4 + \ldots \quad (2)$$

जब $|x| < 1$ हो, तो यह विस्तार, सार्थक है। (2) के दायें पक्ष को निम्न रूप में लिखते हैं

$$1 + yx + 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots.$$

$$-y\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}x^2 + 0 + 0 + 0 + \ldots$$

$$+y\frac{x^3}{3} - \frac{y^2}{3}(1+\frac{1}{2})x^3 + \frac{y^3}{3!}x^3 + 0 + 0 + \ldots$$

$$-y\frac{x^4}{4} - \frac{y^2}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^4 - \frac{y^3}{4!}6 + \frac{y^4}{4!}x^4 + 0 + \ldots$$

स्तम्भवार योग करने पर, y का गुणांक

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \text{ है।}$$

अतः, यह श्रेणी (1) में y के गुणांक के बराबर है जो $\log(1+x)$ है। इससे प्रमेय की उपपत्ति पूर्ण हुई।

प्रमेय की उपर्युक्त उपपत्ति में, हमें श्रेणी (2) में पंक्ति का योग पंक्ति से या स्तम्भ का योग स्तम्भ से करने की प्रक्रिया का औचित्य प्रमाणित करना चाहिए। दूसरे शब्दों में हमें यह दिखाना आवश्यक है कि श्रेणी का योग y की विभिन्न घातों से गुणांक एकत्रित करके प्राप्त किया जा

सकता है। व्यापक रूप से यह चरण उपयुक्त नहीं है। फिर भी इस स्थिति में दिखाया जा सकता है कि $|x| < 1$ के लिए यही विधि उपयुक्त है।

उपप्रमेय

(i) (1) और (2) में y^2 के गुणांकों की तुलना करने पर, हम पाते हैं

$$\frac{1}{2}\{\log(1+x)\}^2 = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{x^4}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) - \dots,$$

जो $|x| < 1$ के लिये सही है।

(ii) प्रमेय में x के स्थान पर $-x$ रखने पर, हम पाते हैं:

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \dots, \text{ यदि } |x| < 1.$$

अर्थात्
$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots, \text{ यदि } |x| < 1. \quad (3)$$

(iii) $-\log(1-x)$ तथा $\log(1+x)$ से प्राप्त श्रेणियों को जोड़ने पर

$$\log(1+x) - \log(1-x) = \log\frac{1+x}{1-x} = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right], \text{ यदि } |x| < 1. \quad (4)$$

संख्यात्मक मूल्यांकन प्राकृत लघुगणक की गणना श्रेणी (4) पर आधारित है। (4) में x के स्थान पर $\frac{1}{3}$ रखने पर,

$$\log 2 = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \dots\right],$$

यह निरूपण जो संख्यात्मक मान निकालने में अत्यंत लाभदायक है तथा इसका मान 0.6931471...

दशमलव के सात स्थानों तक सही है, यदि श्रेणी को $\left(\frac{1}{15}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{15}$ पदों तक लिया जाए तब शेषफल इसे सातवें दशमलव स्थान को तनिक भी प्रभावित नहीं करता है।

उदाहरण 9 यदि x धनात्मक है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\log(1+x) = \frac{x}{1+x} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \dots$$

हल हम पाते हैं कि:

$$-\log(1-y) = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \ldots \qquad [(3 \text{ से})]$$

y के स्थान पर $\frac{x}{1+x}$ रखने पर

$$-\log\left(1-\frac{x}{1+x}\right) = \frac{x}{1+x} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \ldots$$

पुनः $$-\log\left(1-\frac{x}{1+x}\right) = -\log\frac{1}{1+x} = \log(1+x)$$

यही सिद्ध करना था।

उदाहरण 10 यदि $y > 0$, तो सिद्ध कीजिये:

$$\log y = 2\left\{\left(\frac{y-1}{y+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^5 + \ldots\right\}$$

तथा $\log 2$ का दशमलव के तीन स्थान तक मान निकालिये।

हल हम पाते हैं :

$$2\left\{\left(\frac{y-1}{y+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^5 + \ldots\right\} = \log\left[\frac{1+\frac{y-1}{y+1}}{1-\frac{y-1}{y+1}}\right] = \log y.$$

$y = 2$ रखने पर हम पाते हैं

$$\log 2 = 2\left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \ldots\right\}$$

$$= \frac{2}{3}\left\{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^4 + \ldots\right\} = 0.693.$$

उदाहरण 11 $|x| < 1$ के लिये, सिद्ध कीजिये

$$\frac{\log(1+x)}{1+x} = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{4}x^4 + \ldots$$

हल चूंकि

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots,$$

हम पाते हैं

$$\frac{\log(1+x)}{1+x} = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots\right)\left(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots\right)$$

$$= x - \left(1+\frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3 - \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)x^4 + \ldots$$

$$= x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{4}x^4 + \ldots$$

उदाहरण 12 $|x| < \frac{1}{2}$ के लिये सिद्ध कीजिये

$$\log(1+3x+2x^2) = 3x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{9}{3}x^3 - \frac{17}{4}x^4 + \ldots .$$

हल चूंकि $(1 + 3x + 2x^2) = (1 + x)(1 + 2x)$, हम पाते हैं

$$\log(1 + 3x + 2x^2) = \log\{(1 + x)(1+2x)\}$$

$$= \log(1 + x) + \log(1 + 2x)$$

$$= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\right) + \left(2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} - \frac{(2x)^4}{4} + \ldots\right)$$

$$= 3x - x^2\left(\frac{1}{2}+\frac{2^2}{2}\right) + x^3\left(\frac{1}{3}+\frac{2^3}{3}\right) - x^4\left(\frac{1}{4}+\frac{2^4}{4}\right) + \ldots$$

$$= 3x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{9}{3}x^3 - \frac{17}{4}x^4 + \ldots$$

उदाहरण 13 $\frac{5}{1\times2\times3} + \frac{7}{3\times4\times5} + \frac{9}{5\times6\times7} + \ldots$ का योग ज्ञात कीजिये।

हल nवां पद निम्न है

$$t_n = \frac{2n+3}{(2n-1)(2n)(2n+1)}$$

$$= \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n} + \frac{C}{2n+1}$$ कहिए

हम पाते हैं

$$\frac{A}{2n-1}+\frac{B}{2n}+\frac{C}{2n+1}=\frac{A(2n)(2n+1)+B(2n-1)(2n+1)+C(2n-1)2n}{(2n-1)\,2n\,(2n+1)},$$

जहाँ A, B तथा C अचर हैं जो ज्ञात किये जाने हैं। [यह आंशिक भिन्नो में तोड़ना कहलाता है]

$$A(2n)(2n+1)+B(2n-1)(2n+1)+C(2n-1)\,2n = 2n+3$$

इस समानता से A, B तथा C का मान ज्ञात करते हैं।

दोनों पक्षों में n^2, n के गुणांकों तथा अचर पदों की तुलना करने पर,

$$4A+4B+4C=0,\ 2A-2C=2 \text{ तथा } -B=3.$$

समीकरणों के निकाय को हल करने पर हम पाते हैं $A=2,\ B=-3$ और $C=1$. इसलिये nवां पद निम्न रूप में आता है

$$t_n=\frac{2}{2n-1}-\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n+1}.$$

हम ध्यान देते हैं कि

$$t_1=\frac{2}{1}-\frac{3}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{1}-\frac{2}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=2\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right),$$

$$t_2=\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{1}{5}=\frac{2}{3}-\frac{2}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}.$$

इसलिये $$t_1+t_2=\left(\frac{2}{1}-\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\right)$$

$$=2\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$$

$$=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right).$$

इस प्रकार, श्रेणी निम्न रूप में आती है

$$\sum_{n=1}^{\infty}t_n=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots\right)$$

$$=2\log 2+(\log 2-1)=3\log 2-1.$$

उदाहरण 14 किसी उपयुक्त लघुगणकीय श्रेणी को प्रयोग करके log 3 का निकटतम मान निकालिये।

हल हम e के निकटतम मान 2.7 पर विचार करते हैं। log 3 का निकटतम मान इस प्रकार निकालते हैं

$$\log\left(3\frac{e}{2.7}\right)=\log\frac{30e}{27}$$

$$= \log e + \log\frac{10}{9}$$

$$= 1+\log\left(1+\frac{1}{9}\right)$$

$$= 1+\frac{1}{9}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{81}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{729}-\dots$$

$= 1.105$ निकटतम

प्रश्नावली 17.2

निम्न को सिद्ध कीजिये :

1. $\log\left(\frac{m}{n}\right)=2\left[\frac{m-n}{m+n}+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5+\dots\right]$

2. $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+1)^2}+\frac{1}{3(n+1)^3}+\dots=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+\dots$

3. $\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left[1-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2.3(n+1)^2}-\frac{1}{3.4(n+1)^3}+\dots\right]$

4. $\log\left(\frac{1+3x}{1-2x}\right)=5x-\frac{5}{2}x^2+\frac{35}{3}x^3-\frac{65}{4}x^4+\dots$

5. यदि $y=2x^2-1$ और $|x|>1$, सिद्ध कीजिये कि

   $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2x^4}+\frac{1}{3x^6}+\dots=\frac{2}{y}+\frac{2}{3y^3}+\frac{2}{5y^5}+\dots$

6. यदि $t=\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{x^2-1}{(x+1)^2}+\frac{1}{3}\frac{x^3-1}{(x+1)^3}+\dots$, तो '$t$' ज्ञात कीजिये।

निम्न श्रेणियों का योग निकालिये:

7. $\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}-\frac{1}{4\times5}+\dots$

8. $\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{3\times4\times5}+\frac{1}{5\times6\times7}+\dots$

9. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2\times2^2}+\frac{1}{3\times2^3}-\frac{1}{4\times2^4}+\dots$

निम्न श्रेणियों का योग निकालिये :

10. $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^4+\dots$

11. $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\dots$

12. दिखाइये कि

$$\log(x+2h)=2\log(x+h)-\log x-\left\{\frac{h^2}{(x+h)^2}+\frac{1}{2}\frac{h^4}{(x+h)^4}+\frac{1}{3}\frac{h^6}{(x+h)^6}+\dots\right\}.$$

अध्याय 17 पर विविध प्रश्नावली

1. सिद्ध कीजिये :

(i) $\left(1+\frac{a^2x^2}{2!}+\frac{a^4x^4}{4!}+\dots\right)^2-\left(ax+\frac{a^3x^3}{3!}+\frac{a^5x^5}{5!}+\dots\right)^2=1$

(ii) e^{e^x} के विस्तार में x^n, $\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^n}{k!}$ है।

2. सिद्ध कीजिये कि

$$\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}+\dots=\log\left(\frac{4}{e}\right)$$

3. दिखाइये कि

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{9}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{27}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{81}+\dots=\frac{1}{2}+\log3-\log2$$

4. यदि $S=\sum_{2}^{\infty}\frac{{}^{n}C_2}{(n+1)!}$, तो दिखाइये कि $S=\frac{e}{2}-1$

5. सिद्ध कीजिये कि

$$\log\left(\frac{x+1}{x}\right)=2\left\{\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{3(2x+1)^3}+\frac{1}{5(2x+1)^5}+\dots\right\},\ \text{यदि}\ x>0$$

6. यदि $y=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$ तथा $|x|<1$, तो सिद्ध कीजिये कि

$$x=y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\dots$$

7. सिद्ध कीजिये

$$\left\{1+\frac{1+2}{2!}+\frac{1+2+2^2}{3!}+\frac{1+2+2^2+2^3}{4!}+\dots\right\}=e^2-e$$

8. सिद्ध कीजिये

(i) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\log x)^{2n}}{2n!}=\frac{1}{2}\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right)$$

(ii) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\log x)^{n}}{n!}=x$$

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

महान गणितज्ञों में से एक गणितज्ञ लियोनार्ड आयलर (Leonhard Euler) का जन्म स्विट्जरलैण्ड के बासेल (Basel) में बर्नौली गणितज्ञों के परिवार में सन 1707 ई॰ में हुआ था। उन्होंने जॉन बर्नौली (John Bernoulli) से गणित सीखा। उन्होंने 500 से अधिक पुस्तकें तथा शोध पत्र प्रकाशित किये। उनका शोध अबाध रूप से चलता रहा यद्यपि उनके आँख की रोशनी 59 वर्ष की अवस्था में ही चली गई। 1783 ई॰ में अपनी मृत्यु तक उन्होंने 300 अतिरिक्त पाण्डुलिपि छोड़ी जिसका प्रकाशन अगली आधी शताब्दी तक चलता रहा।

आयलर ने बीजगणित, त्रिकोणमिति तथा कलन शास्त्र में प्रयुक्त होने वाले बहुत से चिन्ह तथा शब्दावली बनाये। लैटिन में सन् 1748 ई॰ में उनकी पुस्तक "Introduction to infinitesimal Analysis" गणित की सर्वप्रथम प्रकाशित पुस्तकों में से एक है। कुछ परिचित चिन्हों जैसे e जिसे प्राकृत लघुगणक के आधार में प्रयोग किया जाता है, i को -1 के वर्गमूल के लिये, Σ योग के चिन्ह के लिये, $f(x)$ को फलन के मान के चिन्ह के लिये, π को इकाई वृत्त के क्षेत्र के लिये, इन सभी की खोज का श्रेय आयलर को ही जाता है। आयलर ने ही सर्वसमिका $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ को खोज निकाला था जिसमें $x = \pi$ रखने पर यह हमें पाँच अचर राशियों के बीच सम्बन्ध मिलते हैं। इनकी पुस्तक 'Introductio in Analysin Infinitorum' के सातवें अध्याय में e की ही चर्चा की गई है।

अनन्त श्रेणी $\Sigma \frac{1}{n!}$ के योग के रूप में परिभाषित करते हुए e का संख्यात्मक मान उन्होंने दशमलव के 23 स्थानों तक (2.71828...) सही निकाला उन्होंने इसके लिए दो सतत् भिन्न व्यंजक भी दिया।

चार्ल्स हरमिट ने सन् 1873 ई॰ में e (Transcedental) को अबीजीय सिद्ध किया। सन् 1926 ई॰ में डी॰ एच॰ ल्हेमर (D.H. Lehmer) ने e का मान सतत् भिन्न व्यंजक को लेकर दशमलव के 709 स्थानों तक निकाला।

लगता है कि लघुगणकीय फलन को श्रेणी का रूप स्कॉटिश गणितज्ञ जेम्स ग्रेगरी (James Gregery) ने ही दिया तथा कि $\tan^{-1} x$ को भी श्रेणी के रूप में प्राप्त किया।

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots, \ x \leq 1. \qquad (1)$$

जब समीकरण (1) में $x = 1$ तब यह आसानी से दर्शाया जा सकता है कि ***माधव–ग्रेगरी श्रेणी*** (Madhava Gregery Series) आयलर श्रेणी (Euler's Series)

$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$ में बदल जाती है।

यह श्रेणी नीलकण्ठ के "तंत्र संग्रह" तथा पुतुमन गोविन्द स्वामिन की पुस्तक "***करणपद्धति***" में वर्णित है।

न्यूटन, (Newton) जो 1642 ई॰ में पैदा हुए थे, ने $log\,(1 + x)$ का विस्तार एक अनन्त श्रेणी

$$\frac{1}{(x+1)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

के रूप में या तो लम्बे भाग से अथवा द्विपद प्रमेय द्वारा निकाला। फिर, भी यह निकोलस मरकेटर (Nicolaus Mercator) ही थे जिन्होंने इस श्रेणी को निम्न रूप में सन् 1668 ई॰ में प्रकाशित किया।

$$\log\,(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

$\frac{1}{2}\log\,(1 + x) / (1 - x)$ का विस्तार जॉन वालिस (John Wallis) द्वारा सन् 1695 ई॰ में ज्ञात किया गया। आर कोट्स (R. Cotes) ने अपनी पुस्तक "हारमोनिया मेन्सुरेरम", (Harmonia Mensurarum) जो उनकी मृत्यु के पश्चात् सन् 1722 ई॰ में प्रकाशित हुई, में यह बताया, कि $\log\,(\cos\theta + i\sin\theta) = i\,\theta$ जो $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ के समतुल्य है जिससे आयलर का नाम जुड़ा है परन्तु इसका ज्ञान डी॰ मावरे (De Moivere) को सम्भवतः 1707 ई॰ के आसपास, पहले से ही था।

गणितीय तर्क–शास्त्र (MATHEMATICAL LOGIC)

अध्याय 18

18.1 भूमिका

बिना किसी विशिष्ट अर्थ या संदर्भ के, तर्क–शास्त्र तर्क के व्यापक प्रतीमानों का अध्ययन है। यदि एक वस्तु या तो काली या सफेद है, और यदि वह काली नहीं है, तब तर्क द्वारा यह निष्कर्ष निकलता है, कि वह अवश्य सफेद है। ध्यान पूर्वक देखिए कि दी गयी परिकल्पना से तर्कसंगत विवेचन यह नहीं प्रकट कर सकता है कि काले और सफेद का क्या अर्थ है, या एक वस्तु दोनों प्रकार की क्यों नहीं हो सकती है।

विज्ञान और सामाजिक विज्ञान की अनेक शाखाओं में तर्कशास्त्र के अनुप्रयोगों की सम्भावनाएं हैं। वस्तुतः कम्पयूटर विज्ञान की अनेक शाखाओं जैसे अंकीय तार्किक परिपथ, रूपरेखा स्वचलन सिद्धान्त तथा कृत्रिम बुद्धिमत्ता के लिए तर्कशास्त्र सैद्धान्तिक आधार है।

इस अध्याय में हम कथनों (Statements), कथन के सत्यापन, संयुक्त कथन, आधारभूत तार्किक संयोजको (Basic Logical Connectives), सत्यता–सारणीयाँ (Truth Tables), पुनरूक्तियां (Tautologies), तार्किक समतुल्यताएं (Logical Equivalence), द्वित्व (Duality), कथनों का बीजगणित (Algebra of Statements), तर्कशास्त्र में वेनआरेख का प्रयोग और अन्त में स्वीचिंग परिपथों (Switching Circuits) में तर्कशास्त्र के सरल अनुप्रयोगों का अध्ययन करेंगे।

18.2 कथन (Statements)

कथन एक वाक्य है, जो या तो सत्य है या असत्य है परन्तु एक ही साथ दोनों नहीं हो सकता है।

टिप्पणी एक वाक्य जो एक ही साथ सत्य और असत्य दोनों होता है, वह कथन नहीं, बल्कि एक विरोधाभास है।

उदाहरण 1

(क) निम्नांकित वाक्यों में से प्रत्येक

(i) नई दिल्ली भारतवर्ष में है।

(ii) दो धन दो चार होता है।

(iii) गुलाब लाल है।

(iv) सूर्य एक तारा है।

(v) प्रत्येक वर्ग आयत होता है।

सत्य है, अतः उनमें से प्रत्येक कथन हैं।

(ख) निम्नांकित वाक्यों में से प्रत्येक

(vi) पृथ्वी एक तारा है।

(vii) दो धन दो पाँच होते हैं।

(viii) प्रत्येक आयत वर्ग होता है।

(ix) 8, 6 से छोटा है।

(ग) प्रत्येक समुच्चय परिमित समुच्चय होता है।

असत्य हैं और प्रत्येक एक कथन हैं।

उदाहरण 2

(क) निम्नांकित वाक्यों में से प्रत्येकः

(i) दरवाजा खोलो।

(ii) पंखे का स्विच आन (on) करो।

(iii) अपना गृह कार्य करो।

को सत्य या असत्य की कोटि में नहीं रखा जा सकता है, अतः ये कथन नहीं है। वस्तुतः उनमें से प्रत्येक आदेश (कमाण्ड) है।

(ख) निम्नांकित वाक्यों में से प्रत्येकः

(iv) क्या आप रहमान से मिले?

(v) आप कहाँ जा रहे हें?

(vi) क्या आप ने कभी ताजमहल देखा है?

को सत्य या असत्य की कोटि में नहीं रखा जा सकता है। वस्तुतः उनमें से प्रत्येक प्रश्न हैं, अतः कथन नही है।

(ग) निम्नांकित वाक्यों में से प्रत्येकः

(vii) आप चिर–जीवी रहें!

(viii) ईश्वर आप को आशीष दें!

को सत्य या असत्य की कोटि में नहीं रखा जा सकता हैं। वस्तुतः इनमें से प्रत्येक इच्छाबोधक (Optative) हैं, अतः कथन नही है।

(घ) निम्नांकित वाक्यों में से प्रत्येक:

(ix) अरे! हम मैच जीत गए।

(x) ओह! मैं फेल हो गया।

को भी सत्य या असत्य की कोटि में नहीं रखा जा सकता है। वस्तुतः इनमें से प्रत्येक विस्मयादिबोधक (Exclamatory) हैं, अतः कथन नही है।

(ङ) निम्नांकित वाक्यों में से प्रत्येक:

(xi) सभी लोगों को सुप्रभात।

(xii) आप सर्वोत्कृष्ट भाग्यशाली हों।

को भी सत्य या असत्य की कोटि में नहीं रखा जा सकता है। वस्तुतः इनमें से प्रत्येक अभिलाषा–बोधक (Wish) हैं, अतः कथन नही है।

(च) निम्नांकित वाक्यों में से प्रत्येक:

(xiii) कृपया मेरे पक्ष में कार्य करें।

(xiv) मुझे एक गिलास पानी दीजिए।

को भी सत्य या असत्य की कोटि में नहीं रखा जा सकता है। वस्तुतः उनमें से प्रत्येक एक प्रार्थना (A request) हैं, अतः कथन नही है।

(छ) निम्नांकित में से प्रत्येक

(xv) x , एक प्राकृत संख्या है।

(xvi) वह, कालेज का एक विद्यार्थी है।

एक मुक्त वाक्य है, क्योंकि (xv) की सत्यता या असत्यता x पर निर्भर करती है, और (xvi) की सत्यता या असत्यता सर्वनाम 'वह' के संदर्भ पर निर्भर है। हम देख सकते हैं, कि $x = 1, 2, \ldots$ इत्यादि के लिए (xv) सत्य है परन्तु $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ इत्यादि के लिए असत्य है। इसी प्रकार (xvi) भी सत्य या असत्य हो सकता है। तथापि एक निर्दिष्ट समय या परिस्थिति में वे सत्य या असत्य हो सकते हैं। चूँकि हम इस बात में ही रुचि रखते हैं कि वह सत्य या असत्य है, अतः वाक्य (xv) और (xvi) कथन समझे जा सकते हैं।

टिप्पणी उदाहरण 2 में कथन (xv) और (xvi) को मुक्त कथन भी कहते हैं।

कथनों को निरूपित करने के लिए कुछ संकेतन उपयोगी सिद्ध होते हैं। मान लीजिए कि हम कथनों को $p, q, r, s, \ldots$ जैसे छोटे अक्षरों द्वारा निरूपित करते हैं। इस प्रकार एक कथन "नई दिल्ली एक नगर है।" को p द्वारा निरूपित या व्यक्त करते हैं। इसे हम निम्नांकित प्रकार से लिखते हैं।

p : नई दिल्ली एक नगर हैं।

इसी प्रकार एक अन्य कथन '$2 + 3 = 6$' को q द्वारा व्यक्त करते हैं और लिखते हैं, कि

$q : 2 + 3 = 6$

18.2.1 ***एक कथन का सत्य मान (Truth value of a statement)*** किसी कथन की सत्यता या असत्यता को उसका सत्यमान कहते हैं। प्रत्येक कथन या तो सत्य या असत्य होता है। कोई भी कथन एक ही साथ सत्य और असत्य दोनों नहीं हो सकता है। यदि एक कथन सत्य है तो हम कहते हैं, कि इसका सत्यमान TRUE या T है और यदि वह असत्य है, तो हम कहते हैं कि इसका सत्यमान FALSE या F है।

उदाहरण 3 उदाहरण 1(a) में दिए कथनों के सत्यमान T, जबकि उदाहरण 1(b) के कथनों के सत्यमान F हैं।

18.2.2 ***संयुक्त कथन (Compound statements)*** एक कथन सरल कहलाता है, यदि इसको दो या दो से अधिक कथनों में खण्डित नहीं किया जा सकता हों। उदाहरण 1(a) और (b) में विचारित सभी कथन सरल कथन है।

ऐसे नए कथन, जो दो या अधिक सरल कथनों को संयोजित करने से बनते हें, उन्हें संयुक्त कथन कहते हैं। इस प्रकार संयुक्त कथन वे हैं, जो दो या दो से अधिक सरल कथनों से बने हैं।

उदाहरण 4

(a) कथन "गुलाब लाल हैं और वनफ्शा नीले हैं" एक संयुक्त कथन है, जो दो सरल कथनों *"गुलाब लाल हैं।" और "वनफ्शा नीले हैं।" के संयोग से बना हैं।*

(b) कथन "गीता बीमार है या रेहाना स्वस्थ्य हैं।" भी एक संयुक्त कथन है। यह दो सरल कथनों "गीता बीमार है।" और "रेहाना स्वस्थ्य है।" के संयोग से बना है।

(c) कथन "आज पानी बरस रहा है, और $2 + 2 = 4$" एक संयुक्त कथन है, जो दो सरल कथनों "आज पानी बरस रहा है।" और "$2 + 2 = 4$" का संयुक्त रूप है।

सरल कथन, जो संयुक्त होकर संयुक्त कथनों को बनाते हैं, को *उप–कथन* या *संयुक्त कथन* का घटक कथन कहते हैं। संयुक्त कथन S, जो उपकथनों $p, q, r, \ldots$ से बना है, को $S(p, q, r, \ldots)$ से व्यक्त करते हैं।

एक संयुक्त कथन का आधारभूत गुण यह है, कि उसका सत्यमान, उसके उपकथनों में से प्रत्येक के सत्यमान के साथ ही साथ उसके संयोजन विधि द्वारा पूर्णतः ज्ञात किया जाता है।

प्रश्नावली 18.1

ज्ञात कीजिए कि निम्नांकित वाक्यों में से कौन से कथन हैं, और कौन से कथन नहीं हैं। अपने उत्तर का औचित्य भी दें।

1. संख्या 6 के तीन अभाज्य गुणनखण्ड हैं।
2. एक त्रिभुज के अन्तः कोणों का योगफल 180 अंश है।
3. चन्द्रमा सूर्य के चारो ओर चक्कर लगाता है।
4. एशिया एक महाद्वीप है।
5. 2 एक सम संख्या है।
6. जॉन मुझे ध्यान से सुनो।
7. एक त्रिभुज की चार भुजाएं होती हैं।
8. तुम कौन हो?
9. $2 + 1 = 3$
10. $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।
11. आप कैसे हैं?
12. $x + 3 = 17$
12. अपना कार्य करो।
14. $2 + 3 < 6$
15. तुम्हारा थैला कहाँ है?
16. n व्यक्तियों में से दो व्यक्तियों द्वारा दो कुर्सियों पर बैठने के प्रकारों की संख्या $^nP_2$ है।

निम्नांकित कथनों में से प्रत्येक का सत्यमान (T या F) लिखिए।

17. संख्या 17 अभाज्य है।
18. परिमेय संख्याओं की संख्या परिमित है।
19. वनफ्शा नीले हैं।
20. प्रत्येक वर्ग आयत है।
21. प्रत्येक समुच्चय अपरिमित समुच्चय होता है।
22. सभी पूर्णांक प्राकृत संख्याएं हैं।

23. $2 + 7 = 6$

24. $2 + 3 < 6$

25. शून्य एक सम्मिश्र संख्या है।

28. आकाश नीला है।

18.3 आधारभूत तार्किक संयोजक (Basic Logical Connectives)

सरल कथनों से संयुक्त कथन बनाने के अनेक ढंग हैं। वे शब्द जो सरल कथनों को सम्मिलित कर उन्हें संयुक्त कथन बनाते हैं, संयोजक (Connectives) कहलाते हैं। अंग्रेजी भाषा में हम दो या अधिक कथनों को मिलाकर नए कथनों की रचना संयोजक "और (and)" "या (or)" आदि के प्रयोग द्वारा करते हैं, जिनके अनेक अर्थ होते हैं। क्योंकि अंग्रेजी भाषा में इन संयोजकों का प्रयोग सदैव असंदिग्ध और सुस्पष्ट नहीं है, अतः यह आवश्यक है, कि तर्कशास्त्र की भाषा, जिसे कर्म भाषा (Object Language) कहते हैं, के लिए निश्चित अर्थ वाले संयोजकों के समुच्चय को परिभाषित किया जाय। अब हम कर्मभाषा के लिए संयोजकों को परिभाषित करते हैं जो उपर्युक्त चर्चित संयोजकों के संगत हैं। संयोजन (Conjunction) जो शब्द "और (and)" के संगत है, वियोजन शब्द को या (or)" के संगत है और निषेधन (Negation) जो "नहीं (not)" के संगत, तीन आधारभूत (तार्किक) संयोजक हैं।

हम सयोजन को व्यक्त करने के लिए प्रतीक '$\wedge$', वियोजन को व्यक्त करने के लिए प्रतीक '$\vee$' और निषेधन को व्यक्त करने के लिए प्रतीक '$\sim$' सदैव प्रयोग करते हैं।

टिप्पणी निषेधन को संयोजक कहते हैं, यद्यपि यह दो या दो से अधिक कथनों को मिलाता नहीं है। वास्तव में यह कथन का रूपान्तरण (Modification) कर देता है।

18.3.1 *संयोजन (Conjunction)* यदि दो सरल कथन p और q शब्द 'and' (और) द्वारा सम्बद्ध हों, तो परिणामी संयुक्त कथन "p और q" को p और q का संयोजन (Conjunctions) कहते हैं, और इसे प्रतीक "$p \wedge q$" द्वारा व्यक्त करते हैं।

उदाहरण 5 निम्नांकित सरल कथनों का संयोजन बनाइए।

p : दिनेश एक लड़का है।

q : नगमा एक लड़की है।

हल कथन p और q का संयोजन

$p \wedge q$: दिनेश एक लड़का और नगमा एक लड़की है।

द्वारा व्यक्त होता है।

उदाहरण 6 निम्नांकित कथन का प्रतीकात्मक रूप में अनुवाद कीजिए।

"जैक और जिल पहाड़ी के ऊपर गए।"

हल दिए कथन को पुनः लिखा जा सकता है, यथा

"जैक पहाड़ी के ऊपर गया और जिल पहाड़ी पर गई।"

मान लीजिए कि p : जैक पहाड़ी पर गया और q : जिल पहाड़ी पर गयी।

तब प्रतीकात्मक रूप में दिया कथन '$p \wedge q$' है।

टिप्पणी

1. प्रतीक $\wedge$, जो हिन्दी भाषा में प्रयुक्त संयोजक and (और) के संगत हैं, का विशिष्ट अर्थ है, यद्यपि and (और) का प्रयोग कुछ अन्य अर्थों में भी हो सकता है। अन्तर देखने के लिए निम्नांकित तीन कथनों पर विचार कीजिए।

(i) रमेश एक लड़का (है) और नगमा एक लड़की है।

(ii) कमला ने पुस्तक खोली और पढ़ना आरम्भ किया।

(iii) दिनेश और अहमद मित्र हैं।

कथन (i) में संयोजक 'और' उसी अर्थ में प्रयुक्त है, ज़ो अर्थ प्रतीक $\wedge$ का है। कथन (ii) में शब्द 'और' का अर्थ तब है, क्योंकि "कमला ने पढ़ना प्रारम्भ किया, की क्रिया "कमला ने पुस्तक खोली, क्रिया के पश्चात होती है। अन्ततः (iii) में शब्द 'और' एक संयोजक नहीं है।

2. सामान्यतः संयोजक "and (और)" ऐसे दो कथनों में प्रयुक्त होता है जिनमें कोई सम्बन्ध हो। इसलिए संयुक्त कथन "वर्षा हो रही है और 2 अभाज्य संख्या है।" विचित्र लगता है, किन्तु तर्कशास्त्र में पूर्णतः स्वीकार्य कथन है।

दो सरल कथनों p और q के संयोजन $p \wedge q$ के सत्यमान के सम्बन्ध में हम पाते हैं, कि

(D_1) : *कथन $p \wedge q$ का सत्यमान T होता है, यदि p और q दोनों के सत्यमान T हों।*

(D_2) : *कथन $p \wedge q$ का सत्यमान F होता है, यदि p या q या दोनों के सत्यमान F हों।*

उदाहरण 7 निम्नांकित चार कथनों का सत्यमान लिखिए।

(i) दिल्ली भारत में है और $2 + 3 = 6$

(ii) दिल्ली भारत में है और $2 + 3 = 5$

(iii) दिल्ली नेपाल में है और $2 + 3 = 5$

(iv) दिल्ली नेपाल में है और $2 + 3 = 6$

D_2) को ध्यान में रखते हुए हम पाते हैं, कि कथन (i) का सत्यमान
$= 6$" का सत्यमान F है। कथन (ii) का सत्यमान T है, क्योंकि दोनों
और $2 + 3 = 5$ के सत्यमान T हैं। इसी प्रकार कथनों (iii) और (iv)

। सरल कथन p और q शब्द "या (or)" द्वारा सम्बद्ध हों, तो परिणामी
और q का वियोजन कहते हैं, और प्रतीकात्मक रूप में इसे "$p \vee q$"

कथनों का वियोजन ज्ञात कीजिए।

ता है।

है।

वियोजन $p \vee q$ निम्नांकित द्वारा प्राप्त होता है,

चमकता है या वर्षा होती है।

का अर्थ सदैव वही नहीं होता है जो हिन्दी भाषा में शब्द 'या' का है।
नांकित तीन कथनों पर विचार कीजिए।

या कोलकत्ता जाएगा।

रिंग में कोई गड़बड़ी है।

छः व्यक्तियों को उनके क्रीड़ा में उपलब्धियों के लिए पारितोषिक दिए

क 'या (or)' का प्रयोग दोनों सम्भावनाओं में से किसी एक के होने के
। के कथन, (ii) में स्पष्ट वाँछित अर्थ यह है, कि एक या दूसरी या दोनों,
। अन्ततः (iii) में 'या (or)' का प्रयोग व्यक्तियों के लगभग संख्या सूचित
है, और वह संयोजक के रूप में प्रयुक्त नहीं किया गया है।
और q के वियोजन $p \vee q$ के सत्यमान के लिए सम्बन्ध में हम पाते

का सत्यमान F होता है, जब p और q दोनों का सत्यमान F हो।

का सत्यमान T होता है, यदि p या q या दोनों का सत्यमान T हो।

कथनों में से प्रत्येक का सत्यमान लिखिए।

(iii) भारत यूरोप में है या $2 + 2 = 4$

(iv) भारत यूरोप में है या $2 + 2 = 5$

हल उपर्युक्त (D_3) और (D_4) को ध्यान में रखते हुए हम देखते हैं, कि केवल अन्तिम कथन का सत्यमान F है, क्योंकि उसके दोनों उपकथनों "भारत यूरोप में है।" और "$2 + 2 = 5$" का सत्यमान F है। शेष (i) से (iii) तक के सभी कथनों का सत्यमान T है, क्योंकि उनके उपकथनों मे से कम से कम एक का सत्यमान T है।

18.3.3 *निषेधन (Negation)* एक ऐसा दृढ़ कथन जिसमें कथन की असफलता अथवा खण्डन व्यक्त हो, कथन का निषेधन कहते हैं। किसी कथन का निषेधन सामान्यतः कथन में नहीं (Not) को समुचित स्थान पर प्रविष्ट करने पर अथवा कथन के पहले "यह स्थिति नहीं है, कि" अथवा "यह असत्य है, कि" जोड़कर बनाया जाता है।

कथन p के निषेधन को प्रतीकात्मक रूप में "$\sim p$" द्वारा व्यक्त करते हैं।

टिप्पणी किसी कथन का निषेधन बनाते समय शब्द "नहीं (Not)" को कथन में समुचित स्थान पर प्रविष्ट कराने में सावधानी बरतनी चाहिए। वास्तव में कथन "सभी वर्ग आयत हैं।"

का निषेधन, "नहीं हैं सभी वर्ग आयत" जो (1)

"सभी वर्ग आयत नहीं हैं"। के समतुल्य नहीं है।

तथापि एक ऐसे वर्ग का अस्तित्व है, जो आयत नहीं है (1) के समतुल्य है।

टिप्पणी उल्लेखनीय है, कि किसी कथन को अस्वीकार करने के लिए मात्र एक प्रत्युदाहरण (Counter example) पर्याप्त है। उदाहरणतः कथन "सभी वर्ग आयत हैं।" को असत्य प्रमाणित करने के लिए कम से कम एक वर्ग जो आयत नहीं है, के अस्तित्व को प्रमाणित करने की आवश्यकता है।

उदाहरण 10 कथन p : नई दिल्ली एक नगर है। का निषेधन लिखिए।

हल p का निषेधन निम्नलिखित है।

$\sim p$: नई दिल्ली एक नगर नहीं है।

या $\sim p$: यह स्थिति नहीं है, कि नई दिल्ली एक नगर है।

या $\sim p$: यह असत्य है, कि नई दिल्ली एक नगर है।

टिप्पणी हम देखते हैं, कि यद्यपि तीन कथन "नई दिल्ली एक नगर नहीं है।" "यह स्थिति नहीं है, कि नई दिल्ली एक नगर है" और "यह असत्य है, कि नई दिल्ली एक नगर है" सर्वसम (Identical) हैं, हमने इन तीनों को $\sim p$ (कथन p : नई दिल्ली एक नगर है के निषेधन) के रूप में अनुवाद किया है। इसका कारण यह है, कि इन तीनों कथनों का भाषा में एक ही अर्थ है।

इस बहुरूपता (Multiplicity) का कारण यह है, कि तर्कशास्त्र की भाषा (object language) में एक कथन प्रतीक द्वारा व्यक्त किया जाता है, और इसकी संगतता प्राकृतिक भाषा में कई कथनों द्वारा हो सकती है, जिसके द्वारा एक व्यक्ति अपने को विभिन्न ढंगों से व्यक्त कर सकता है।

उदाहरण 11 निम्नांकित कथनों का निषेधन लिखिए।

p : मैं कल अपनी कक्षा में गया।

q : $2+3=6$

r : सभी प्राकृत संख्याएं पूर्णांक हैं।

हल कथन p का निषेधन

$\sim p$: मैं कल अपनी कक्षा में नहीं गया।

या

यह स्थिति नहीं है कि कल मैं अपनी कक्षा में गया।

या

यह असत्य है, कि मैं कल अपनी कक्षा में गया।

या

मैं कल अपनी कक्षा से अनुपस्थित था।

कथन q के निषेधन निम्नांकित हैं।

$\sim q : 2+3 \neq 6$

या

यह स्थिति नहीं है, कि $2+3=6$

या

यह असत्य है, कि $2+3=6$

कथन r के निषेधन निम्नांकित हैं।

$\sim r$: नहीं हैं, सभी प्राकृत संख्याएं पूर्णांक

अथवा

एक ऐसी प्राकृत संख्या का अस्तित्व है जो पूर्णांक नहीं है।

अथवा

यह स्थिति नहीं है, कि सभी प्राकृत संख्याएं पूर्णांक हैं।

अथवा

यह असत्य है, कि सभी प्राकृत संख्याएं पूर्णांक हैं।

कथन p के निषेधन $\sim p$ के पाते हैं, कि

(D_5) : *$\sim p$ का सत्यमान T होता है, जब–जब p का सत्यमान F हो।*

(D_6) : *$\sim p$ का सत्यमान F होता है, जब–जब p का सत्यमान T हो।*

उदाहरण 12 निम्नांकित कथनों में से प्रत्येक के निषेघन का सत्यमान लिखिए।

(i) p : प्रत्येक वर्ग एक आयत है।

(ii) q : पृथ्वी एक तारा है।

(iii) $r : 2 + 3 < 4$

हल (D_5) और (D_6) को ध्यान में रखकर हम पाते हैं कि $\sim p$ का सत्यमान F हैं क्योंकि p का सत्यमान T है। इसी प्रकार $\sim q$ और $\sim r$ का सत्यमान T है, क्योंकि दोनों कथनों q और r के सत्यमान F है।

18.3.4 *संयुक्त कथनों के निषेधन (Negation of compound statements)*

(I) ***संयोजन का निषेधन (Negation of conjunction)*** स्मरण कीजिए कि संयोजन $p \wedge q$ में दो उपकथन p और q हैं, जिन दोनों का आस्तित्व साथ ही साथ है। इसलिए एक संयोजन के निषेधन का अर्थ दोनों उपकथनों में से कम से कम एक के निषेधन से पूरा होता है। इस प्रकार हम पाते हैं कि,

(D_7) : *संयोजन $p \wedge q$ का निषेधन, p के निषेधन और q के निषेधन का वियोजन होता है। समतुल्यतः हम लिखते हैं कि*

$$\sim (p \wedge q) = \sim p \vee \sim q .$$

उदाहरण 13 निम्नांकित संयोजन में से प्रत्येक का निषेधन लिखिए।

(a) पेरिस फ्राँस में है, और लन्दन इंगलैण्ड में है।

(b) $2 + 3 = 5$ और $8 < 10$.

हल

(a) चूँकि p : पेरिस फ्राँस में है। और q : लन्दन इंगलैण्ड में है।

तब (a) में संयोजन $p \wedge q$ द्वारा व्यक्त है।

अब $\sim p$: पेरिस फ्राँस में नहीं है।

$\sim q$: लन्दन इंगलैण्ड में नहीं है।

इसलिए (D_7) के प्रयोग से $p \wedge q$ का निषेधन निम्नांकित द्वारा व्यक्त है।

$\sim(p \wedge q)$ = पेरिस फ्राँस में नहीं है या लन्दन इंगलैण्ड में नहीं है।

(b) यहाँ $p: 2+3=5$ और $q: 8<10$.

तब (b) का संयोजन $p \wedge q$ द्वारा व्यक्त होता है।

अब $\sim p: 2+3 \neq 5$ और $\sim q: 8 \nless 10$.

तब (D_7) के प्रयोग से $p \wedge q$ का निषेधन निम्नांकित है।

$\sim(p \wedge q) = 2+3 \neq 5$ या $(8 \nless 10)$.

(II) ***वियोजन का निषेधन* (Negation of disjunction)** स्मरण कीजिए कि वियोजन $p \vee q$ दो उपकथनों p और q द्वारा निर्मित है। ये ऐसे हैं कि या p या q या दोनों अस्तित्व में है। इसलिए वियोजन के निषेधन का अर्थ दोनों p और q के साथ ही साथ निषेधन से है। इस प्रकार प्रतीकात्मक रूप में हम पाते हैं कि

(D_8) : *एक वियोजन $p \vee q$ का निषेधन p के निषेधन और q के निषेधन का संयोजन होता है। समतुल्यतः हम लिखते हैं कि*

$$\sim(p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$$

उदाहरण 14 निम्नांकित प्रत्येक वियोजन का निषेधन लिखिए।

(a) राम कक्षा X में है या रहीम कक्षा XII में है।

(b) 7, 4 से बड़ा है या 6, 7 से छोटा है।

हल

(a) मान लीजिए p : राम कक्षा X में पढ़ता है और q : रहीम कक्षा XII में है।

तब (a) में वियोजन $p \vee q$ द्वारा व्यक्त होता है।

अब $\sim p$: राम कक्षा X में नहीं है।

$\sim p$: रहीम कक्षा XII में नहीं है।

अब (D_8) के प्रयोग से $p \vee q$ का निषेधन प्राप्त होता है।

$\sim(p \vee q)$: राम कक्षा X में नहीं है और रहीम कक्षा XII में नहीं है।

(b) मान लीजिए p : 7, 4 से बड़ा है और q : 6, 7 से छोटा है।

तब (D_8) के प्रयोग से $p \vee q$ का निषेधन प्राप्त होता है।

$\sim(p \vee q)$: 7, 4 से बड़ा नहीं है, और 6, 7 से छोटा नहीं है।

(III) ***निषेधन का निषेधन*** **(Negation of a negation)** जैसा कि इंगित किया गया है, कि निषेधन एक संयोजक नहीं है, परन्तु एक रूपान्तरक है। यह एक सरल कथन को रूपान्तरित कर देता है, और एक सरल कथन में ही लागू होता है। इसलिए (D_5) और (D_6) को ध्यान में रखते हुए किसी कथन p के लिए हम पाते हैं, कि

(D_9) : *एक कथन के निषेधन का निषेधन स्वयं मूल कथन ही होता है। समतुल्यतः हम लिखते हैं, कि*

$$\sim(\sim p) = p$$

उदाहरण 15 (D_9) का सत्यापन कीजिए, यदि कथन

p : गुलाब लाल है।

हल p का निषेधन निम्नांकित है,

$\sim p$: गुलाब लाल नहीं है।

इसलिए p के निषेधन के निषेधन

$\sim(\sim p)$: यह स्थिति नहीं है, कि गुलाब लाल नहीं है।

या

यह असत्य है, कि गुलाब लाल नहीं है।

अथवा

गुलाब लाल है।

अनेक कथन, विशिष्टतः गणित में इस प्रकार के होते हैं "यदि p तो q" ऐसे कथनों को प्रतिबन्धित कथन (Conditional statements) कहते हैं। इन्हें $p \to q$ द्वारा व्यक्त करते हैं। इसे 'p से अर्थ q निकलता है।' पढ़ते हैं।

दूसरे कथन का प्रचलित रूप "p यदि और केवल यदि q" है। ऐसे कथनों को द्वि–प्रतिबन्धित (Bi-conditional) कहते हैं। द्वि–प्रतिबन्धित कथन को $p \leftrightarrow q$ द्वारा व्यक्त करते हैं।

$p \to q$ और $p \leftrightarrow q$ के सत्यमान के सम्बन्ध में हम पाते हैं कि

(a) प्रतिबन्धित कथन $p \to q$ असत्य है, यदि p सत्य है और q असत्य है। सिद्धान्ततः p के असत्य होने पर $p \to q$ का सत्य होना, बिना q के सत्यमान पर विचार किए ही, सुनिश्चित है।

(b) द्वि–प्रतिबन्धित कथन $p \leftrightarrow q$ सत्य है, यदि p और q के सत्यमान सदैव समान हों, अन्यथा यह असत्य है

सत्यापित किया जा सकता है, कि $p \to q \;=\; (\sim p) \vee q$.

निम्नांकित सारणी आधारभूत संयोजकों, प्रतिबन्धित कथनों, द्वि–प्रतिबन्धित कथनों और उनके निषेधनों को प्रतीकों सहित स्मरण रखने में सहायक है।

क्रमांक	संयुक्त/ संयोजक	संयोजक द्वारा बनाए गए संयुक्त कथन की प्रकृति	प्रयोग में लाया गया प्रतीक	प्रतीकात्मक रूप	निषेधन
1.	और	संयोजन	$\wedge$	$p \wedge q$	$(\sim p) \vee (\sim q)$
2.	या	वियोजन	$\vee$	$p \vee q$	$(\sim p) \wedge (\sim q)$
3.	नहीं	निषेधन	$\sim$	$\sim p$	$\sim(\sim p) = p$
4.	यदि तब	अर्थ या प्रतिबंधित	$\rightarrow$	$p \rightarrow q$	$p \wedge (\sim q)$
5.	यदि और केवल यदि	समतुल्यता (या द्वि–प्रतिबन्धित)	$\leftrightarrow$	$p \leftrightarrow q$	$[p \wedge (\sim q)] \vee [q \wedge (\sim p)]$

प्रश्नावली 18.2

1. संयोजन और वियोजन बनाइए।

p : मौसम ठण्डा है।

q : वर्षा हो रही है।

2. मान लीजिए कि कथन p "आज वर्षा हो रही है।" तथा q "इस कमरे में बीस कुर्सियां हैं।" हों, तो निम्नांकित का वर्णन करने के लिए सरल वाक्य लिखिए।

(i) $p \vee q$ (ii) $\sim p$ (iii) $\sim q$

(iv) $\sim p \vee q$ (v) $p \wedge q$

3. निम्नांकित प्रत्येक मिश्र कथन को प्रतीकात्मक रूप में लिखिए।

(i) आकाश नीला है और घास हरी है।

(ii) जावेद समाचार पत्र A या समाचार पत्र B पढ़ता है।

(iii) अशोक समाचार पत्र X और समाचार पत्र Y पढ़ता है।

(iv) यह असत्य है, कि घास हरी है।

(v) यह असत्य है, कि आकाश नीला नहीं है।

4. यदि p कथन "मैं टेनिस पसन्द करता हूँ।" और q "मैं फुटबाल पसन्द करता हूँ।" को निरूपित करते हों तो $\sim p \wedge \sim q$ द्वारा क्या निरूपित होता है?

5. क्या निम्नांकित कथनों में से प्रत्येक दूसरे के निषेधन हैं?

(a) "x एक परिमेय संख्या नहीं है।"
"x एक अपरिमेय संख्या नहीं है।"

(b) "x एक परिमेय संख्या नहीं है।"
"x एक अपरिमेय संख्या है।"

प्रश्न 6 से 15 तक के प्रत्येक कथन का निषेधन लिखिए

6. राम फुर्तिला और स्वस्थ है।

7. $x > 7$ या $x < 7$

8. मृदुल निर्दयी है या वह कठोर है।

9. x एक वास्तविक अपरिमेय संख्या नहीं है।

10. आकाश नीला है और $2 < 7$

11. सभी त्रिभुज वर्ग है।

12. मिनी फुर्तीली या सुन्दर है।

13. प्रत्येक परिमेय संख्या वास्तविक संख्या है।

14. $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

15. सम्मिश्र संख्याएं वास्तविक संख्याएं हैं।

18.4 सत्यता सारणी (Truth Tables)

मान लीजिए कि उपकथनों $p, q, r, \ldots$ से निर्मित $S(p, q, r, \ldots)$ एक संयुक्त कथन हैं। एक सरल और संक्षिप्त ढंग जो S के सत्यमान तथा उपकथनों $p, q, r, \ldots$ आदि के सत्यमानों के बीच सम्बन्ध को व्यक्त करता है, इसे एक सारणी द्वारा प्रदर्शित करते हैं, जिसे संयुक्त कथन S की सत्यता सारिणी कहते हैं। किसी कथन की सत्यता सारिणी के अवलोकन से हम बहुत सी सूचनाएं जैसे सभी तार्किक सम्भावनाओं के लिए कथन सत्य है, सभी तार्किक सम्भावनाओं के लिए कथन असत्य है, इत्यादि को प्राप्त करते हैं।

एक सत्यता सारिणी में पंक्तियाँ और स्तम्भ होते हैं। प्रारम्भिक स्तम्भ उपकथनों के सभी सम्भव सत्यमानों से भरे जाते हैं, और अन्तिम स्तम्भ संयुक्त कथन S के सत्यमानों द्वारा भरा जाता है। (S का सत्यमान प्रारम्भिक स्तम्भों में अंकित S के उपकथनों के सत्यमानों पर निर्भर करता है।)

यदि एक संयुक्त कथन मात्र एक सरल कथन से बना है (जैसे $p \vee \sim p$) तब सत्यता–सारणी में पंक्तियों की संख्या $2^1 (= 2)$ होगी, और यदि एक मिश्र कथन दो सरल उपकथनों से बना है। (जैसे $p \vee q$) तब इसके सत्यता सारिणी में $2^2 (= 4)$ पंक्तियों की अवश्यकता होती है इत्यादि। हम नीचे दिए गए उदाहरणों की सहायता से सत्यता सारिणी बनाने की विधि स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 16 $\sim p$ की सत्यता सारिणी बनाइए।

हल ध्यान दीजिए कि एक सरल कथन $\sim p$ केवल एक सरल कथन p से निर्मित है। अतः इसकी सत्यता सारिणी में $2^1 (= 2)$ पंक्तियाँ होंगी। p के सभी सम्भावित सत्यमानों पर विचार करने की आवश्यकता है।

(D_5) को ध्यान में रखते हुए स्मरण कीजिए कि p का सत्यमान T होता है, यदि और केवल यदि $\sim p$ का सत्यमान F हो, $\sim p$ की सत्यता सारिणी निम्नांकित है।

सारिणी 18.1 $\sim p$ के लिए सत्यता सारिणी

p	$\sim p$
T	F
F	T

उदाहरण 17 $p \wedge (\sim p)$ के लिए सत्यता सारिणी बनाइए।

हल ध्यान दीजिए कि संयुक्त कथन $p \wedge (\sim p)$ केवल एक सरल कथन p से निर्मित है। अतः सत्यता सारिणी में पंक्तियों की संख्या $2^1 (= 2)$ होगी। यह आवश्यक है, कि p के सभी सम्भावित मानों पर विचार किया जाय।

चरण 1 p के सभी सम्भावित मानों अर्थात् T और F को सत्यता सारिणी (सारिणी 18.2) के प्रथम स्तम्भ में लिखिए।

चरण 2 (D_5) और (D_6) का प्रयोग करते हुए $\sim p$ के सत्यमानों को सत्यता–सारिणी के द्वितीय स्तम्भ में लिखिए (सारिणी 18.3).

सारिणी 18.2

p	$\sim p$	$p \wedge (\sim p)$
T		
F		

सारिणी 18.3

p	$\sim p$	$p \wedge (\sim p)$
T	F	
F	T	

चरण 3 में (D_2) का प्रयोग करते हुए $p \wedge (\sim p)$ के सत्यमानों को अन्तिम स्तम्भ में यथा स्थान लिखिए। (सारिणी 18.4).

सारिणी 18.4 $p \wedge (\sim p)$ के लिए सत्यता सारिणी

p	$\sim p$	$p \wedge (\sim p)$
T	F	F
F	T	F

उदाहरण 18 $p \wedge q$ के लिए सत्यता सारिणी बनाइए।

हल संयुक्त कथन $p \wedge q$ दो सरल कथनों p और q से निर्मित है। अतः $p \wedge q$ के सत्यता सारिणी में पंक्तियों की संख्या 2^2 (= 4) होनी चाहिए। अब कथनों p और q के सभी सम्भावित सत्यमानों अर्थात् TT, TF, FT और FF को सारिणी 18.5 के प्रथम दो स्तम्भों में लिखिए।

सारिणी 18.5

p	q	$p \wedge q$
T	T	
T	F	
F	T	
F	F	

तब उपर्युक्त (D_1) और (D_2) को ध्यान में रखते हुए संयुक्त कथन $p \wedge q$ के सत्यमानों को सत्यता सारिणी (सारिणी 18.6) में प्रविष्ट करके सारिणी पूर्ण कीजिए।

सारिणी 18.6 $p \wedge q$ के लिए सत्यता सारिणी

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

उदाहरण 19 $p \wedge q$ के लिए सत्यता सारिणी बनाइए।

हल उपर्युक्त (D_3) और (D_4) को ध्यान में रखते हुए, स्मरण कीजिए कि संयुक्त कथन $p \wedge q$ का सत्यमान F होता है, यदि और केवल यदि p और q दोनों के सत्यमान F हो, अन्यथा $p \wedge q$ का सत्यमान T होता है। इस प्रकार $p \wedge q$ के लिए सत्यता सारिणी, सारिणी 18.7 में दी गयी है।

सारिण 18.7 $p \vee q$ के लिए सत्यता सारिणी

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

उदाहरण 20 निम्नांकित कथनों के लिए सत्यता सारिणी बनाइए।

(a) $\sim [p \wedge (\sim q)]$.

(b) $(p \wedge q) \wedge (\sim p)$.

(c) $\sim [(\sim p) \vee (\sim q)]$.

हल (a) $\sim[p \wedge (\sim q)]$ के लिए सत्यता सारिणी निम्नांकित है।

सारिणी 18.8 $\sim[p \wedge (\sim q)]$ के लिए सत्यता सारिणी

p	q	$\sim q$	$p \wedge (\sim q)$	$\sim[p \wedge (\sim q)]$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T

(b) $(p \wedge q) \wedge (\sim p)$ के लिए सत्यता सारिणी निम्नांकित है।

सारिणी 18.9 $(p \wedge q) \wedge (\sim p)$ के लिए सत्यता सारिणी

p	q	$p \wedge q$	$\sim p$	$(p \wedge q) \wedge (\sim p)$
T	T	T	F	F
T	F	F	F	F
F	T	F	T	F
F	F	F	T	F

(c) $\sim[(\sim p) \vee (\sim q)]$ के लिए सत्यता सारिणी निम्नांकित है।

सारिणी 18.10 $\sim[(\sim p) \vee (\sim q)]$ के लिए सत्यता सारिणी

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \vee (\sim q)$	$\sim[(\sim p) \vee (\sim q)]$
T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F
F	F	T	T	T	F

प्रश्नावली 18.3

निम्नांकित में से प्रत्येक के लिए सत्यता सारिणी बनाइए।

1. $\sim(p \vee q)$

2. $(\sim p) \wedge (\sim q)$

3. $(p \vee q) \vee (\sim p)$

4. $(p \vee q) \vee (\sim q)$

5. $\sim[p \vee (\sim q)]$

6. $(p \vee q) \vee r$

7. $(p \vee q) \wedge r$

8. $(p \wedge q) \wedge r$

9. $(p \wedge q) \vee r$

10. $(p \wedge q) \vee (\sim r)$

11. $(p \wedge q) \vee [\sim (p \wedge q)]$

18.5 पुनरूक्तियाँ (Tautologies)

एक कथन पुनरूक्ति (Tautology) कहलाता है यदि वह सभी तार्किक सम्भावनाओं के लिए सत्य हो। दूसरे शब्दों में एक कथन, पुनरूक्ति तब कहा जाता है, जब उसका सत्यमान T और केवल T सत्यता सारिणी के अन्तिम स्तम्भ में हो। समान्यतः एक कथन को विरोधोक्ति (Contradiction) कहते हैं, यदि सभी तार्किक सम्भावनाओं में वह असत्य हो। दूसरे शब्दों में एक कथन विरोधोक्ति तब कहलाता है, जब इसके सत्यता सारिणी के अन्तिम स्तम्भ में सत्यमान F और केवल F हो। एक दिए कथन को पुनरूक्ति (या विरोधोक्ति) निश्चित करने का सीधा ढंग उसकी सत्यता सारिणी का बनाना है।

उदाहरण 21 कथन $p \vee (\sim p)$ एक पुनरूक्ति हैं, क्योंकि इसकी सत्यता सारिणी के (सारिणी 18.11) के अन्तिम स्तम्भ में सर्वत्र T है।

उदाहरण 22 कथन $p \wedge (\sim p)$ एक विरोधोक्ति है क्योंकि इसकी सत्यता सारिणी (सारिणी 18.12) के अन्तिम स्तम्भ में सर्वत्र F है।

सारिणी 18.11 $p \vee (\sim p)$ के लिए सत्यता सारिणी

p	$\sim p$	$p \vee (\sim p)$
T	F	T
F	T	T

सारिणी 18.12 $p \wedge (\sim p)$ के लिए सत्यता सारिणी

p	$\sim p$	$p \wedge (\sim p)$
T	F	F
F	T	F

टिप्पणी एक पुनरूक्ति का निषेधन एक विरोधोक्ति है, क्योंकि यह सैदव असत्य है। और एक विरोधोक्ति का निषेधन एक पुनरूक्ति होती है क्योंकि यह सदैव सत्य है।

उदाहरण 23 दर्शाइए कि

(a) $\sim[p \vee (\sim p)]$ एक विरोधोक्ति है।

(b) $\sim[p \wedge (\sim p)]$ एक पुनरूक्ति है।

हल (a) $\sim[p \vee (\sim p)]$ के लिए सत्यता सारिणी निम्नांकित है।

सारिणी 18.13 $\sim[p \vee (\sim p)]$ के लिए सत्यता सारिणी

p	$\sim p$	$p \vee (\sim p)$	$\sim[p \vee (\sim p)]$
T	F	T	F
F	T	T	F

क्योंकि इसकी सत्यता सारिणी के अन्तिम स्तम्भ में सर्वत्र F है, अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि $\sim[p \vee (\sim p)]$ एक विरोधोक्ति है।

(b) $\sim[p \wedge (\sim p)]$ के लिए सत्यता सारिणी निम्नांकित है।

सारिणी 18.14 $\sim[p \wedge (\sim p)]$ के लिए सत्यता सारिणी

p	$\sim p$	$p \wedge (\sim p)$	$\sim[p \wedge (\sim p)]$
T	F	F	T
F	T	F	T

क्योंकि इसकी सत्यता सारिणी के अन्तिम स्तम्भ में सर्वत्र T है, अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि $\sim[p \wedge (\sim p)]$ एक पुनरूक्ति है।

उदाहरण 24 दर्शाइए कि,

(a) $(p \vee q) \vee (\sim p)$ एक पुनरुक्ति है।

(b) $(p \wedge q) \wedge (\sim p)$ एक विरोधोक्ति है।

हल (a) $(p \vee q) \vee (\sim p)$ के लिए सत्यता सारिणी निम्नांकित है।

सारिणी 18.15 $(p \vee q) \vee (\sim p)$ के लिए सत्यता सारिणी

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$(p \vee q) \vee (\sim p)$
T	T	T	F	T
T	F	T	F	T
F	T	T	T	T
F	F	F	T	T

क्योंकि $(p \vee q) \vee (\sim p)$ की सत्यता सारिणी के अन्तिम स्तम्भ में सर्वत्र T है, अतः निष्कर्ष यह निकलता है, कि $(p \vee q) \vee (\sim p)$ एक पुनरुक्ति है।

(b) $(p \wedge q) \wedge (\sim p)$ की सत्यता सारिणी 18.9 को स्मरण कीजिए और ध्यानपूर्वक देखिए कि उसके अन्तिम स्तम्भ में केवल F है। अतः $(p \wedge q) \wedge (\sim p)$ विरोधोक्ति है।

प्रश्नावली 18.4

निम्नांकित कथनों में से कौन से पुनरुक्ति और कौन से विरोधोक्ति हैं, इसके निर्धारण के लिए सत्यता सारिणी का प्रयोग कीजिए।

1. $[(\sim q) \wedge p] \wedge q$

2. $(\sim q \wedge p) \wedge (p \wedge (\sim p))$

3. $[(\sim q) \wedge p] \vee [p \vee (\sim p)]$

4. $(p \wedge q) \wedge (\sim (p \wedge q))$

5. $(p \wedge (\sim q)) \wedge ((\sim p) \vee q)$

6. $(p \wedge q) \vee (\sim p) \vee [(p \wedge (\sim q)]$

7. $[(\sim p) \wedge q) \wedge (q \wedge r)] \wedge (\sim q)$

8. $[(\sim p) \vee q] \vee [p \wedge (\sim q)]$

18.6 तार्किक समतुल्यताएं (Logical Equivalence)

दो कथन S_1 $(p, q, r, ...)$ और S_2 $(p, q, r, ...)$ तर्कतः समतुल्य या सरलतः समतुल्य कहलाते हैं, यदि सभी तार्किक सम्भावनाओं के लिए उनके सत्यमान समान हों, तथा इन्हें

$S_1 (p, q, r, ...) \equiv S_2 (p, q, r, ...)$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

दूसरे शब्दों में S_1 और S_2 तर्कतः समतुल्य हैं, यदि उनके लिए बनाई गयी सत्यमान सारिणियाँ समान हों। (समान सत्यता सारिणी से अभिप्राय यह है, कि उनके सत्यता सारिणियों के अन्तिम स्तम्भों में प्रविष्टयाँ समान हों।)

उदाहरण 25 दिखाइए कि $\sim(p \wedge q)$ और $(\sim p) \vee (\sim q)$ तर्कतः समतुल्य है।

हल दोनों कथनों की सत्यता सारिणीयाँ निम्नांकित हैं।

सारिणी 18.16 $\sim(p \wedge q)$ की सत्यता सारिणी

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

सारिणी 18.17 $(\sim p) \vee (\sim q)$ की सत्यता सारिणी

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \vee (\sim q)$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

अब ध्यानपूर्वक देखिए कि दोनों सारिणीयों के अन्तिम स्तम्भ की प्रविष्टियाँ समान हैं, अतः कथन $\sim(p \wedge q)$ कथन $(\sim p) \vee (\sim q)$ के समतुल्य है।

टिप्पणी कथनों

p : मोहन एक लड़का है।

q : संगीता एक लड़की है।

पर विचार कीजिए

अब उदाहरण 25 से हम पातें हैं, कि

$$\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q).$$

अतः कथन

"यह स्थिति नहीं है कि मोहन एक लड़का है, और संगीता एक लड़की है।" का वही अर्थ है, जो कथन

"मोहन एक लड़का नहीं है या संगीता एक लड़की नहीं है।" का है

उदाहरण 26 मान लीजिए, p : दक्षिणी–पश्चिमी मानसून इस वर्ष बहुत अच्छा है।

और q : नदियों का जल–स्तर बढ़ रहा है।

$\sim[(\sim p) \vee (\sim q)]$ का शाब्दिक अनुवाद कीजिए।

हल उदारहण 25 को ध्यान में रखते हुए हम पाते हैं, कि

$$\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q).$$

अतः कथन $\sim[(\sim p) \vee (\sim q)]$ वही है, जो कथन $\sim(p \wedge q)$ का निषेधन है, और यह वही है जो संयोजन $p \wedge q$ है। अतः $\sim[(\sim p) \vee (\sim q)]$ का शाब्दिक अनुवाद है,

"इस वर्ष दक्षिण–पश्चिम मानसून बहुत अच्छा है और नदियों का जल–स्तर बढ रहा है।"

उदाहरण 27 निम्नांकित सिद्ध कीजिए।

(a) $\sim[p \vee (\sim q)] \equiv (\sim p) \wedge q$.

(b) $\sim[(\sim p) \wedge q] \equiv p \vee (\sim q)$.

(c) $\sim(\sim p) \equiv p$.

हल **(a)** $\sim[p \vee (\sim q)]$ और $(\sim p) \wedge q$ के लिए सत्यता–सारिणी निम्नांकित है।

सारिणी 18.18 $\sim[p \vee (\sim q)]$ की सत्यता सारिणी

p	q	$\sim q$	$p \vee (\sim q)$	$\sim[p \vee (\sim q)]$
T	T	F	T	F
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	T	F

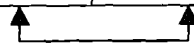
सारिणी 18.19 $(\sim p) \wedge q$ की सत्यता सारिणी

p	q	$\sim p$	$(\sim p) \wedge q$
T	T	F	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	F

दोनों सारिणियों के अन्तिम स्तम्भ समान हैं।

(b) सत्यता सारिणी 18.20 को ध्यान में रखते हुए उपपत्ति स्पष्ट है।

सारिणी 18.20 सत्यता सारिणी $p \vee (\sim q)$ और $\sim[(\sim p) \wedge q]$ की सत्यता सारिणी

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \wedge q$	$p \vee (\sim q)$	$\sim[(\sim p) \wedge q]$
T	T	F	F	F	T	T
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	T	T

(c) सारिणी 18.21 के अनुसार समतुल्यता सिद्ध होती है।

सारिणी 18.21 $\sim(\sim p)$ की सत्यता सारिणी

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
T	F	T
F	T	F

उदाहरण 28 सिद्ध कीजिए $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)$.

हल सत्यता सारिणी 18.22 से समतुल्यता सिद्ध होती है।

सारिणी 18.22 $\sim(p \vee q)$ और $(\sim p) \wedge (\sim q)$ की सत्यता सारिणी

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(\sim p) \wedge (\sim q)$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	T	T

उदाहरण 29 यदि t एक पुनरूक्ति को व्यक्त करता है, और p कोई सरल कथन है। तब

(a) $p \wedge t \equiv p$ (b) $p \vee t \equiv t$.

हल उपयुक्ति की उपपत्ति के लिए हम निम्नांकित सत्यता सारिणी 18.23 बनाते हैं।

सारिणी 18.23 $p \wedge t$ और $p \vee t$ की सत्यता सारिणी

p	t	$p \wedge t$	$p \vee t$
T	T	T	T
F	T	F	T

उदाहरण 30 यदि c एक विरोधोक्ति व्यक्त करता है, तब किसी कथन p के लिए हम पाते हैं, कि

(a) $p \vee c \equiv p$ (b) $p \wedge c \equiv c$.

हल निम्नांकित सत्यता सारिणी 18.24 अभीष्ट उपपत्ति प्रदान करती है।

सारिणी 18.24 $p \vee c$ और $p \wedge c$ की सत्यता सारिणी

p	c	$p \vee c$	$p \wedge c$
T	F	T	F
F	F	F	F

उदाहरण 31 यदि p, q और r तीन कथन हैं, तो सिद्ध कीजिए कि :

(a) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$.

(b) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$.

हल हम अभीष्ट उपपत्ति के लिए निम्नांकित सत्यता सारिणी बनाते हैं।

सारिणी 18.25 $(p \vee q) \vee r$, $p \vee (q \vee r)$, $(p \wedge q) \wedge r$ और $p \wedge (q \wedge r)$ की सत्यता सारिणी

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$(p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$	$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T	T	F	F
T	F	T	T	T	F	F	T	T	F	F
T	F	F	T	F	F	F	T	T	F	F
F	T	T	T	T	F	T	T	T	F	F
F	T	F	T	T	F	F	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F	F	T	T	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F

उदाहरण 32 यदि p, q, r कोई तीन कथन हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

(a) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

(b) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

हल सत्यता सारिणी 18.26 अभीष्ट उपपत्ति प्रदान करती है।

सारिणी 18.26 $p \wedge (q \vee r)$, $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, $p \vee (q \wedge r)$ और $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ की सत्यता सारिणी

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$q \wedge r$	$p \vee q$	$p \vee r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	F	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F	T	T	F	F	F	T	T
F	T	T	F	F	T	T	T	T	F	F	T	T
F	T	F	F	F	F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F

प्रश्नावली 18.5

यदि t एक पुनरूक्ति और c एक विरोधोक्ति हो, तो प्रश्न 1 से 15 तक में ज्ञात कीजिए कि कौन–कौन कथनों के जोड़े तर्कतः समतुल्य हैं।

1. $p \vee (p \wedge q)$ और p.

2. $\sim(p \vee q)$ और $(\sim p) \wedge (\sim q)$.

3. $\sim[(p \wedge q) \wedge r]$ और $\sim[p \wedge (q \wedge r)]$.

4. $\sim[(p \vee q) \vee r]$ और $\sim[p \vee (q \vee r)]$.

5. $(p \wedge q) \vee r$ और $p \wedge (q \vee r)$.

6. $(\sim p)\vee q$ और $\sim(p\vee q)$.

7. $p\vee(p\wedge q)$ और q.

8. $\sim(p\vee q)$ और $(\sim p)\wedge q$.

9. $(p\vee q)\vee r$ और $p\vee(q\wedge r)$.

10. $[\sim(p\vee q)\wedge(p\vee(\sim r))]\wedge[(\sim p)\vee(\sim q)]$ और $(p\vee r)$.

11. $(p\wedge q)\wedge r$ और $p\wedge(q\vee r)$.

12. $[(\sim p)\vee q]\wedge[p\vee(\sim r)]\wedge[(\sim p)\vee(\sim q)]$ और $\sim(p\vee r)$.

13. $[(\sim q)\wedge p]\wedge[p\wedge(\sim p)]$ और $(p\vee q)\wedge c$.

14. $[(\sim p)\vee q]\vee[p\wedge(\sim q)]$ और $(p\wedge q)\vee t$.

15. $(p\wedge q)\vee\{(\sim p)\vee[p\wedge(\sim q)]\}$ और $[(\sim p)\wedge q]\vee t$.

18.7 द्वित्व (Duality)

दो मिश्र कथन S_1 और S_2 परस्पर द्विवचन (Duals) कहलाते हैं, यदि वे एक दूसरे से $\wedge$ को $\vee$ द्वारा और $\vee$ को $\wedge$ द्वारा प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होते हों। समवद्धक $\wedge$ और $\vee$ भी एक दूसरे के द्विवचन (Duals) कहलाते हैं।

उदाहरण 33 निम्नांकित कथनों के द्विवचन लिखिए:

(a) $(p\vee q)\vee r$ (b) $(p\wedge q)\wedge r$

(c) $[\sim(p\vee q)]\wedge[p\vee\{\sim(q\wedge(\sim s)\}]$.

हल अभीष्ट द्विवचन निम्नांकित हैं

(a) $(p\wedge q)\wedge r$ (b) $(p\vee q)\vee r$

(c) $[\sim(p\wedge q)]\vee[p\wedge\{\sim(q\vee(\sim s))\}]$

टिप्पणी यदि मिश्र कथन S में विशिष्ट चर t (पुनरुक्ति) और c (विरोधोक्ति) प्रयुक्त हों तो S के द्विवचन को प्राप्त करने के लिए t को c और c को t से [और निःसन्देह $\wedge$ को $\vee$ और $\vee$ को $\wedge$ से प्रतिस्थापित करने पर] प्राप्त करते हैं।

उदाहरण 34 निम्नांकित प्रत्येक कथन के द्विवचन लिखिए :

(a) $(p\wedge q)\vee t$ (b) $(p\vee t)\wedge r$

हल अभीष्ट द्विवचन निम्नांकित हैं

(a) $(p \vee q) \wedge c$ (b) $(p \wedge c) \vee r$

यदि $S(p, q) = p \wedge q$ एक संयुक्त कथन हो, तो $S^*(p, q) = p \vee q$, जहाँ $S^*(p, q)$ और $S(p, q)$ परस्पर द्विवचन हैं। निरीक्षण कीजिए कि,

$$\sim S(p, q) = \sim (p \wedge q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q) \text{ [उदाहरण 25 द्वारा]}$$

$$= S^*(\sim p, \sim q)$$

और

$$\sim S^*(p, q) = \sim (p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q) \text{ [उदाहरण 28 द्वारा]}$$

$$= S(\sim p, \sim q).$$

इस प्रकार $\sim S(p,q) \equiv S^*(\sim p, \sim q)$ और $\sim S^*(p,q) \equiv S(\sim p, \sim q)$ हैं। हम इस परिणाम को संयुक्त क़थन $S(p_1, p_2, ..., p_n)$, के लिए भी प्रसारित कर सकते हैं जिसमें कथनों की संख्या परिमित है। इस प्रकार हम पाते हैं, कि

(F_1) : $\sim S(p_1, p_2, ..., p_n) \equiv S^*(\sim p_1, \sim p_2, ..., \sim p_n)$

(F_2) : $\sim S^*(p_1, p_2, ..., p_n) \equiv S(\sim p_1, \sim p_2, ..., \sim p_n)$,

जहाँ $S^*(p_1, p_2, ..., p_n)$ संयुक्त कथन $S(p_1, p_2, ..., p_n)$ का द्वित्व है।

उदाहरण 35 यदि $S(p, q, r)$, संयुक्त कथन $(\sim p) \wedge [\sim (q \vee r)]$ है, तो (F_1) का सत्यापन कीजिए।

हल यदि $S^*(p, q, r)$, संयुक्त कथन $S(p, q, r)$ का द्विवचन हो, तो

$$S^*(p, q, r) = (\sim p) \vee [\sim (q \wedge r)].$$

अब

$$\sim S(p, q, r) = \sim [(\sim p) \wedge [\sim (q \vee r)]].$$

$$\equiv p \vee (q \vee r) \qquad \text{[उदाहरण 25 और 27(c) के प्रयोग द्वारा]}$$

अतः

$$S^*(\sim p, \sim q, \sim r) = (\sim(\sim p)) \vee [\sim((\sim q) \wedge (\sim r))]$$

$$\equiv p \vee [q \vee r]$$ [उदाहरण 25 और 27(c) के प्रयोग द्वारा]

इसलिए

$$\sim S(p, q, r) = S^*(\sim p, \sim q, \sim r)$$ सत्यापित हुआ।

प्रश्नावली 18.6

यदि t पुनरूक्ति और c विरोधोक्ति व्यक्त करते हों, तो प्रश्न 1 से 14 तक दिए प्रत्येक कथन का द्विवचन लिखिए।

1. $(p \vee q) \wedge (r \vee s)$.

2. $[p \vee (\sim q)] \wedge (\sim p)$.

3. $[\sim(p \vee q)] \wedge [p \vee \{\sim(q \wedge (\sim s))\}]$.

4. $(p \wedge q) \wedge t$.

5. $(p \wedge q) \vee r$.

6. $(\sim p) \wedge [(\sim q) \wedge (p \vee q) \wedge (\sim r)]$.

7. $(p \wedge q) \vee c$.

8. $(p \wedge q) \wedge c$.

9. $(p \vee q) \wedge t$.

10. $(p \vee q) \vee t$.

11. $(p \vee q) \vee c$.

12. $(p \vee q) \wedge c$.

13. यदि $S(p, q, r)$, संयुक्त कथन $p \wedge (q \wedge r)$ हो तो (F_1) का सत्यापन कीजिए।

14. यदि $S(p, q, r)$, संयुक्त कथन $p \vee (q \vee r)$ हो तो (F_1) का सत्यापन कीजिए।

निम्नांकित प्रत्येक संयुक्त कथन का द्विवचन लिखिए।

15. राम स्वस्थ्य है, या गरिमा सुन्दर है।

16. मैं आलू–चिप्स और टमाटर–सूप पसन्द करता हूँ।

17. मार्क और अयूब जंगल गए।

18. उपमा एक गायिका है या अल्मा एक नर्तकी हैं।

19. सोहन और शर्मिला उर्दू नहीं पढ़ सकते हैं।

20. दीपक एक डाक्टर है, या प्रिया एक अध्यापिका है।

18.8 कथनों का बीजगणित (Algebra of Statements)

कथन अनेक नियमों को संतुष्ट करते हैं, उनमें से कुछ निम्नांकित हैं।

1. **वर्गसम नियम (Idempotent laws)** यदि p कोई कथन है, तो,

   (a) $p \vee p \equiv p$ (b) $p \wedge p \equiv p$

सारिणी 18.27

p	$p \vee p$	$p \wedge p$
T	T	T
F	F	F

उपपत्ति इसकी उपपत्ति सत्यता सारिणी 18.27 से सुस्पष्ट है।

2. **साहचर्य नियम (Associative laws)** यदि p, q, r कोई तीन कथन हैं, तो

   (a) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

   (b) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

उपपत्ति उदाहरण 31 को ध्यान में रखते हुए इसकी उपपति स्पष्ट है।

3. **क्रम–विनिमेय नियम (Commutative laws)** यदि p और q दो कथन हैं, तो

   (a) $p \vee q \equiv q \vee p$

   (b) $p \wedge q \equiv q \wedge p$.

उपपत्ति छात्रगण स्वयं सिद्ध करें, क्योंकि सिद्ध करना सरल है।

4. **वितरण नियम/बंटन नियम (Distributive laws)** यदि p, q, r कोई तीन कथन हैं, तब

   (a) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

   (b) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

उपपत्ति उदाहरण 32 को ध्यान में रखते हुए उपपति सुस्पष्ट है।

5. **तत्समक नियम (Identity laws)** यदि p कोई कथन, t पुनरूक्ति और c विरोधोक्ति है, तब

   (a) $p \vee t = t$ (b) $p \wedge t = p$

   (c) $p \vee c = p$ (d) $p \wedge c = c$

उपपत्ति उदाहरणों 29 और 30 को ध्यान में रखते हुए उपपति सुस्पष्ट है।

6. **पूरक नियम (Complement laws)** यदि t पुनरूक्ति, c विरोधोक्ति और p कोई कथन है, तो

(a) $p \vee (\sim p) \equiv t$ (b) $p \wedge (\sim p) \equiv c$

(c) $\sim t \equiv c$ (d) $\sim c \equiv t$

उपपत्ति उदाहरणों 21 और 22 को ध्यान में रखते हुए (a) और (b) की उपपत्तियाँ सुस्पष्ट हैं, और (c) और (d) की उपपत्ति छात्रों को करने के लिए छोड़ दी जाती है।

7. **घात करण नियम (Involution law)** यदि p कोई कथन है, तो

$\sim (\sim p) \equiv p$.

उपपत्ति उदाहरण 27 (c) को ध्यान में रखते हुए उपपत्ति सुस्पष्ट है।

8. **डी–मारगान के नियम (De Morgan's laws)** यदि p और q दो कथन हैं, तो

(a) $\sim (p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)$

(b) $\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q)$.

उपपत्ति उदाहरणों 25 और 28 को ध्यान में रखते हुए उपपत्ति सुस्पष्ट है।

18.9 तर्क–शास्त्र में वेन–आरेख का प्रयोग (Use of Venn Diagrams in Logic)

अन्य कथनों $S_1, S_2, \ldots$ इत्यादि से निर्गत कथन S एक युक्ति (Argument) है।

कथन S को निष्कर्ष और कथनों $S_1, S_2, \ldots$ आदि को परिकल्पनाएं (Hypotheses) कहते हैं। निम्नांकित कथनों पर विचार कीजिए।

S_1 : प्राकृत संख्याएं पूर्णांक हैं।

S_2 : x, एक पूर्णांक नहीं है।

S : x, एक प्राकृत संख्या नहीं है।

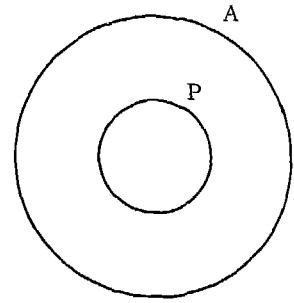
यहाँ देखिए कथन S, कथनों S_1 और S_2 से निर्गत है। ये तीनों कथन साथ साथ एक युक्ति हैं, जिसमें S_1 और S_2 परिकल्पनाएं और S निष्कर्ष है।

उदाहरण 36 निम्नांकित कथनों से निर्गत निष्कर्ष प्राप्त करने के लिए वेन–आरेख का प्रयोग कीजिए।

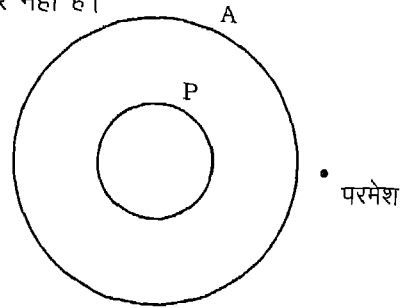
S_1 : सभी प्रोफेसर अनमने (Absent-minded) होते हैं।

S_2 : परमेश अनमने नहीं हैं।

आकृति 18.1

हल ऐसे प्रश्नों को हल करने के लिए वेन–आरेख का प्रयोग किया जा सकता है। मान लीजिए कि P सभी प्रोफेसरों का समुच्चय है, और A सभी अनमने (Absent-minded) व्यक्तियों का समुच्चय है। कथन S_1 की सत्यता के आधार पर समुच्चय P को पूर्णतः समुच्चय A के अन्तर्गत रखा गया है, जैसा आकृति 18.1 में प्रदर्शित है। अब कथन S_2 की सत्यता के आधार पर परमेश को समुच्चय A के पूर्णतः बाहर एक नामांकित बिन्दु द्वारा निरूपित किया गया है। जैसा कि आकृति 18.2 में प्रदर्शित है। चूँकि बिन्दु 'परमेश' समुच्चय A के पूर्णतः बाहर है, अतः यह आवश्यक रूप से समुच्चय P के भी बाहर है।

अतः हम निष्कर्ष निकालते हैं, कि परमेश प्रोफेसर नहीं है।

आकृति 18.2

परिकल्पनाओं $S_1, S_2, \ldots, S_n$ से निर्मित एक युक्ति, जिसका निष्कर्ष S है, को वैध उस स्थिति में कहते हैं, यदि सभी $S_1, S_2, \ldots, S_n$ के सत्य होने पर S, सत्य हो। किसी युक्ति की वैधता का परीक्षण के लिए वेन–आरेख का उपयोग अधिक लाभप्रद है। इसके लिए सर्वप्रथम परिकल्पनाओं (या आधार वाक्यों) की सत्यता आरेखों द्वारा प्रदर्शित करते हैं, तब आरेखों का विश्लेषण करके परीक्षण करते हैं, कि क्या उनसे निष्कर्ष की सत्यता आवश्यक रूप से व्यक्त हो रही है।

उदाहरण 37 निम्नांकित युक्तियों की वैधता के परीक्षण के लिए वेन–आरेख का प्रयोग कीजिए।

(a) S_1 : सभी प्रोफेसर अनमने होते है।

S_2 : परमेश अनमने नहीं है।

S : परमेश प्रोफेसर नहीं है।

(b) S_1 : सभी प्रोफेसर अनमने होते हैं।

S_2 : परमेश अनमने नहीं है।

S_0 : परमेश प्रोफेसर है।

हल

(a) आकृति 18.2 के वेन–आरेख पर विचार कीजिए। ध्यान दीजिए कि निष्कर्ष S की सत्यता परिकल्पनाओं S_1 और S_2 की सत्यता का अनुगमन करती है। अग्रतः यह असम्भव है कि परिकल्पनाओं S_1 और S_2 के सत्य होने पर निष्कर्ष असत्य हो। अतः युक्ति (a) वैध है।

(b) आकृति 18.2 के वेन आरेख पर पुनः विचार कीजिए और ध्यान दीजिए कि निष्कर्ष S_0 का अनुगमन परिकल्पनाओं S_1 और S_2 की सत्यता के आधार पर नहीं हो रहा है। अतः युक्ति (b) वैध नहीं है।

उदाहरण 38 निम्नांकित युक्तियों की वैधता–परीक्षण के लिए वेन आरेख का प्रयोग कीजिए।

(a) S_1 : प्राकृत संख्याएं पूर्णांक हैं।

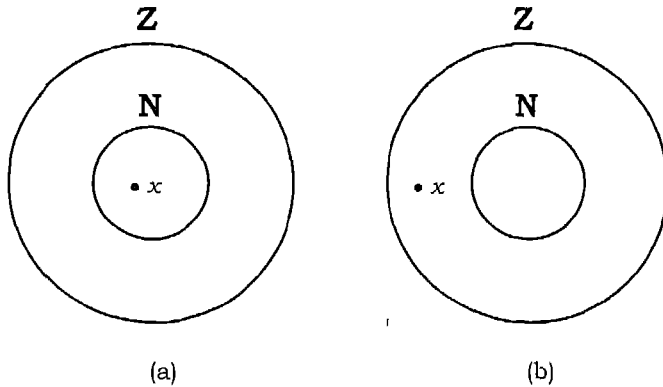
S_2 : x एक पूर्णांक है।

S : x एक प्राकृत संख्या है।

(b) S_1 : प्राकृत संख्याएं पूर्णांक हैं।

S_2 : x एक पूर्णांक है।

S_0 : x एक प्राकृत संख्या नहीं है।

हल (a) मान लीजिए कि समुच्चय Z पूर्णांकों के समुच्चय को निरूपित करता है, और N प्राकृत संख्याओं के समुच्चय को निरूपित करता है। अब कथन S_1 की सत्यता समुच्चय N को समुच्चय Z के अन्तर्गत पूर्णतः रखने पर व्यक्त होती है, और कथन S_2 की सत्यता नामांकित एक बिन्दु x को समुच्चय Z. के अन्तर्गत रखकर व्यक्त होती है। ध्यान पूर्वक देखिए कि बिन्दु x

आकृति 18.3

समुच्चय Z के अन्तर्गत कहीं स्थित है परन्तु यह निश्चित नहीं है कि समुच्चय N के सापेक्ष बिन्दु x कहाँ स्थित है। अतः एक स्थिति आकृति 18.3 में दर्शायी गई स्थिति हो सकती है। देखिए आकृति 18.3(a) के अनुसार निष्कर्ष S की सत्यता यथा x एक प्राकृत संख्या है, का अनुगमन परिकल्पनाओं S_1 और S_2 की सत्यता के आधार पर होता है। परन्तु आकृति 18.3 (b) के अनुसार निष्कर्ष S का अनुगमन परिकल्पनाओं S_1 और S_2 की सत्यता के आधार पर नहीं हो रहा है। [उदाहरणतः x, -2 हो सकता है, जो एक प्राकृत संख्या नहीं है।] अतः निष्कर्ष S का अनुगमन परिकल्पनाओं S_1 और S_2 की सत्यता के आधार पर आवश्यक रूप से नहीं हो रहा है, इस प्रकार युक्ति (a) वैध नहीं बल्कि अवैध है।

(b) आकृति 18.3(b) को ध्यान में रखते हुए निष्कर्ष S_0 की सत्यता का अनुगमन परिकल्पनाओं S_1 और S_2 की सत्यता के आधार पर हो रहा है। परन्तु आकृति 18.3 (a) के अनुसार इसका अनुगमन आवश्यक रूप से नहीं हो रहा है, अतः युक्ति (b) भी अवैध है।

प्रश्नावली 18.7

निम्नांकित कथनों की सत्यता वेन आरेख द्वारा निरूपित कीजिए।

1. कुछ द्विघातीय समीकरणों के दो वास्तविक मूल होते हैं।

2. सभी समबाहु त्रिभुज, समद्विबाहु त्रिभुज हैं।

3. सभी परिमेय संख्याएं बास्तविक संख्याएं हैं, और सभी बास्तविक संख्याएं सम्मिश्र संख्याएं हैं।

4. सभी अध्यापक विद्वान हैं, और सभी विद्वान अध्यापक हैं।

5. सभी समबाहु त्रिभुज समान कोणिक हैं, और सभी समानकोणिक त्रिभुज समबाहु त्रिभुज हैं।

6. सभी प्राकृत संख्याएं बास्तविक संख्याएं हैं, और x के एक प्राकृत संख्या नहीं है।

7. सभी मानव मरणशील हैं, और x एक मानव नहीं है।

8. सभी मानव मरणशील हैं, और x एक मानव है।

निम्नांकित प्रत्येक युक्ति की वैधता का वेन आरेख द्वारा जांच कीजिए

9. S_1 : सभी वर्ग आयत हैं।

S_2 : x, एक आयत नहीं है।

S : x, एक वर्ग है।

10. S_1 : सभी वर्ग आयत हैं।

S_2 : x, एक आयत नहीं है।

S_0 : x, एक वर्ग नहीं है।

11. S_1 : सभी प्रोफेसर अनमने होते (Absent-minded) हैं।

S_2 : गणेश एक प्रोफेसर नहीं है।

S : गणेश अनमने (Absent-minded) हैं।

12. S_1 : सभी प्रोफेसर अनमने होते (Absent-minded) हैं।

S_2 : गणेश एक प्रोफेसर नहीं है।

S_0 : गणेश अनमने (Absent-minded) नहीं है।

13. S_1 : सभी समबाहु त्रिभुज समद्विबाहु हैं।

S_2 : T एक समबाहु त्रिभुज है।

S : T एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

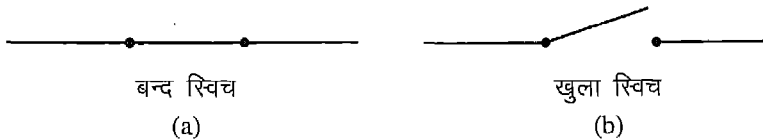
14. S_1 : सभी समबाहु त्रिभुज समद्विबाहु हैं।

S_2 : T एक समबाहु त्रिभुज हैं।

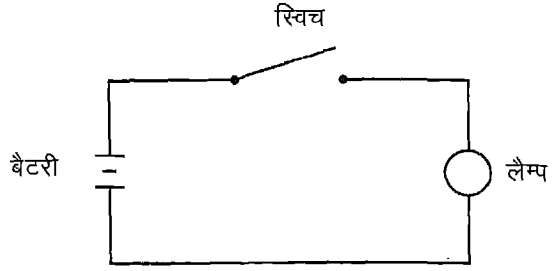
S_0 : T एक समद्विबाहु त्रिभुज नहीं है।

18.10 अनुप्रयोग (Applications)

तर्कशास्त्र जिसकी अब तक हमने बिवेचना की है, को द्वि–मान तर्कशास्त्र कहते हैं, क्योंकि हम केवल उन्हीं कथनों पर विचार किए हैं, जिनके सत्यमान सत्य या असत्य होते हैं। ठीक इसी प्रकार की स्थिति विभिन्न विद्युति–सम्बन्धी (Electrical) और यान्त्रिकी–सम्बन्धी (Mechanical) उपक्रमों में भी होती है। सन् 1930 दशाब्दी के अन्तिम वर्षों में क्लाउड़ शन्नौन (Claude Shannon) प्रथम व्यक्ति थे जिन्होंने स्वीचिंग उपक्रम (Switching devices) के क्रियाओं में और तार्किक संयोजन की क्रियाओं में समानता का अवलोकन किया। उन्होंने इस समानता (Analogy) का प्रयोग अत्यन्त सफलतापूर्वक सरकिट डिजाइन (Circuit Design) की समस्याओं के हल करने में किया।

देखिए कि एक विद्युत–स्विच घुमाकर विद्युत–प्रकाश को आन (on) और आफ (off) करने में प्रयुक्त होती है, अतः, यह दो–दशा उपक्रम (Two-state device) है। अब विभिन्न विद्युत–जाल कार्यो की तार्किक संयोजनों की सहायता से व्याख्या करेंगे। इसके लिए सर्वप्रथम हम विद्युत–स्विच की कार्य–प्रणाली का वर्णन करते हैं। आकृति 18.4 में देखिए, जिसमें एक साधारण स्विच की दो स्थितियों को दर्शाया गया है।

आकृति 18.4

(a) में जब स्विच बन्द [अर्थात आन (on) है] है, तब विद्युत–धारा एक सिरे से दूसरे सिरे तक बह सकती है। (b) में जब स्विच खुली है [अर्थात आफ (off) है], तब विद्युत–धारा नहीं बह सकती है।

अब हम एक विद्युत–लैम्प, जो एक स्विच से नियन्त्रित होता है, के उदाहरण पर विचार करते हैं। इस प्रकार की परिपथ आकृति 18.5 में दर्शायी गयी है।

आकृति 18.5

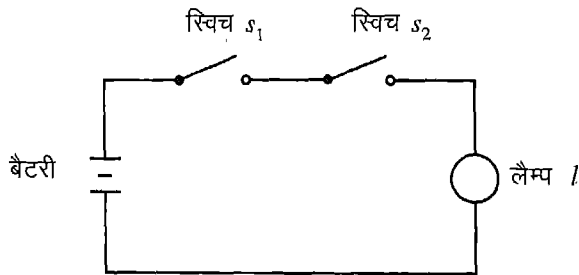
देखिए, जब स्विच s खुली है, सरकिट में विद्युत–धारा नहीं बहती है, और इसलिए लैम्प बुझा (off), रहता है परन्तु यदि स्विच s बन्द रहती है तो लैम्प प्रकाशित [आन (on)] रहता है। इस प्रकार लैम्प प्रकाशित रहता है यदि और केवल यदि स्विच s बन्द है।

यदि हम कथनों को निम्नांकित प्रकार से व्यक्त करते हैं।

p : स्विच s बन्द है।

l : लैम्प प्रकाशित है।

तब तर्क शास्त्र की भाषा के अनुसार उपर्युक्त सरकिट को $p \equiv 1$ द्वारा व्यक्त कर सकते हैं।

अब उपर्युक्त सरकिट के एक विस्तार पर विचार कीजिए, जिसमें दो स्विचें s_1 और s_2 श्रेणी–बद्ध क्रम में जोड़ी गयी है, जैसा कि आकृति 18.6 में प्रदर्शित है।

स्विच s_1 और s_2 स्विच श्रेणी बद्ध क्रम में हैं

आकृति 18.6

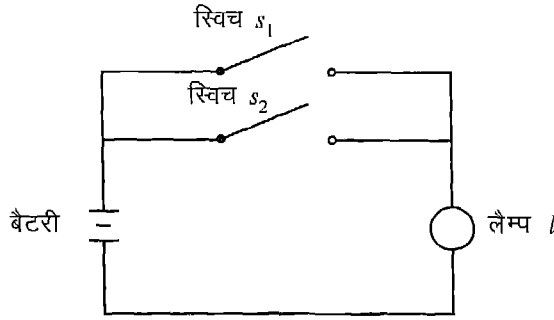
यहाँ देखिए कि लैम्प प्रकाशित है, यदि और केवल यदि स्विचें s_1 और s_2 बन्द हों। यदि हम कथनों को निम्नांकित रूप में प्रकट करते हैं, तो

p : स्विच s_1 बन्द है।

q : स्विच s_2 बन्द है।

l : लैम्प प्रकाशित है।

तब उपर्युक्त परिपथ को $p \wedge q \equiv 1$ द्वारा व्यक्त कर सकते हैं।

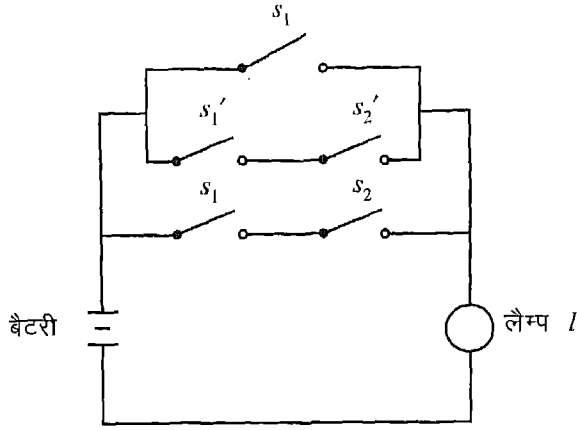
अब हम दो स्विचें s_1 और s_2 को समान्तर क्रम में जोड़ने पर वने परिपथ पर विचार करते हैं (आकृति 18.7)

स्विच s_1 और s_2 स्विच समान्तर श्रेणी बद्ध हैं

आकृति 18.7

यहाँ देखिए कि बल्ब प्रकाशित है, यदि और यदि कम से कम एक स्विच बन्द है। इस प्रकार उपर्युक्त सरकिट को $p \vee q \equiv l$ द्वारा व्यक्त कर सकते हैं, जहाँ कथन p, q और l उपर्युक्त की भाँति निरूपित हैं।

टिप्पणी स्विचों का परस्पर स्वतन्त्र रहना सदैव आवश्यक नहीं हैं। दो या दो से अधिक स्विचों का इस प्रकार जोड़ा जाना सम्भव है, जिससे वे साथ ही साथ खुल अथवा बन्द हो सकती हैं। हम आरेख में इस प्रकार की स्विचों को एक ही अक्षर द्वारा व्यक्त करते हैं।

यदि हम दो स्विचों को अक्षरों s_1 और s_1' द्वारा निरूपित करते हैं तो इसका अर्थ यह होता है, कि जब कभी s_1 खुली है, तो s_1' बन्द है, और जब कभी s_1' खुली है, तो, s_1 बन्द है।

उदाहरण 39 निम्नांकित आकृति 18.8 में दी गयी सरकिट को तर्क शास्त्र के प्रतीकात्मक रूप में व्यक्त कीजिए।

आकृति 18.8

हल जांच कीजिए कि बल्ब प्रकाशित है, यदि और केवल यदि s_1 और s_2 दोनों या तो बन्द हों, या s_1' और s_2' दोनों खुले हों या केवल s_1 बन्द हो।

यदि हम कथनों को निम्नांकित रूप में व्यक्त करते हैं तो,

p : स्विच s_1 बन्द है।

q : स्विच s_2 बन्द है।

l : लैम्प प्रकाशित है।

तब

$\sim p$: स्विच s_1 खुली है।

या

स्विच s_1' बन्द है।

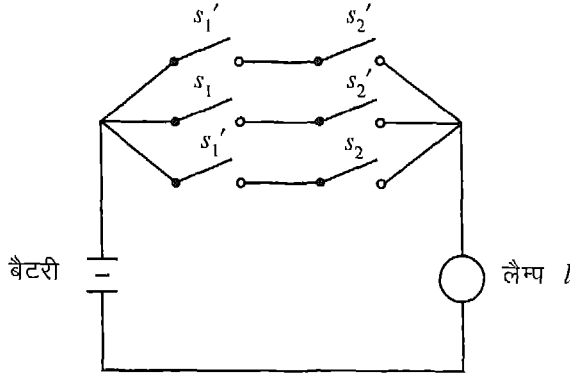
$\sim q$: स्विच s_2 खुली है।

या

स्विच s_2' बन्द है

अतः आकृति 18.8 की परिपथ तर्क–शास्त्र के प्रतीकात्मक रूप में

$p \vee [(\sim p) \wedge (\sim q)] \vee (p \wedge q) \equiv l$ द्वारा व्यक्त है।

उदाहरण 40 आकृति 18.9 में दी गयी परिपथ की वैकल्पिक व्यवस्था दीजिए, जिससे नई परिपथ में केवल दो स्विचे हों।

आकृति 18.9

हल निरीक्षण कीजिए कि लैम्प प्रकाशित है, यदि और केवल यदि s_1' और s_2' दोनों बन्द हों या s_1 और s_2' दोनों बन्द हो या स्विचें s_1' और s_2 दोनों बन्द है।

यदि हम कथनों को निम्नांकित रूप में व्यक्त करते हैं।

p : स्विच s_1 बन्द है।

q : स्विच s_2 बन्द है।

l : लैम्प प्रकाशित है।

तब जैसा कि पूर्व उदाहरण में स्पष्ट किया गया है, कि तर्क–शास्त्र के प्रतीकात्मक रूप में उपर्युक्त सरकिट निम्नांकित द्वारा निरूपित है।

$$l \equiv [(\sim p) \wedge (\sim q)] \vee [p \wedge (\sim q)] \vee [(\sim p) \wedge q]$$

$$\equiv (\sim q \wedge \sim p) \vee (\sim q \wedge p) \vee (\sim p \wedge q)$$ (क्रम–विनिमेय नियम द्वारा)

$$\equiv (\sim q) \wedge [(\sim p) \vee p] \vee [(\sim p) \wedge q]$$ (बंटन नियम द्वारा)

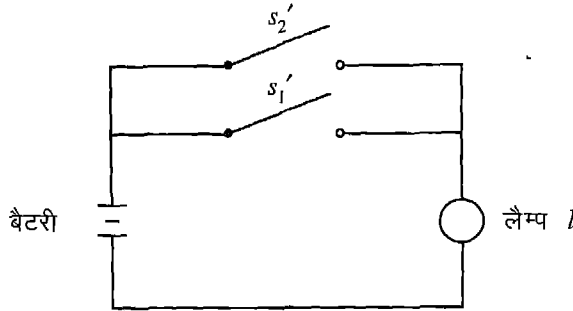
$$\equiv [(\sim q) \wedge t] \vee [(\sim p) \wedge q]$$ (क्योंकि $(\sim p) \vee p \equiv t$ एक पुनरूक्ति है।)

$$\equiv (\sim q) \vee [(\sim p) \wedge q]$$ (तत्समक नियम द्वारा)

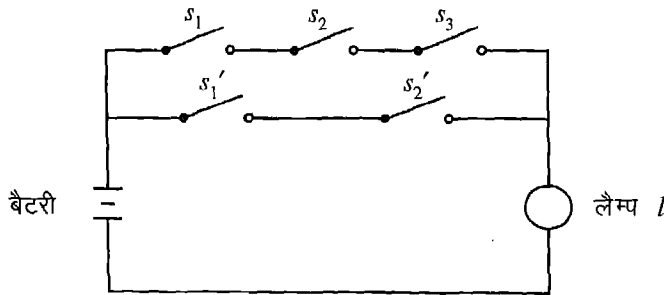
$$\equiv [(\sim q) \vee (\sim p)] \wedge [(\sim q) \vee q]$$ (बंटन नियम द्वारा)

$\equiv [(\sim q) \vee (\sim p)] \wedge t$ (क्योंकि $(\sim q) \vee q \equiv t$ एक पुनरूक्ति है।)

$\equiv (\sim q) \vee (\sim p)$ (तत्समक नियम द्वारा)

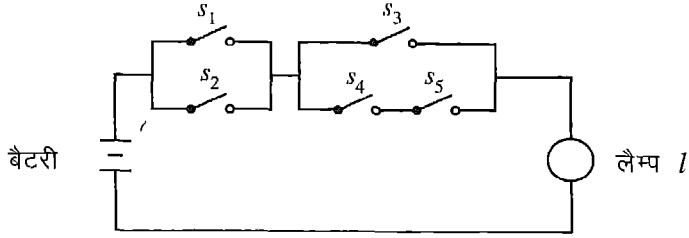
इस प्रकार दो स्विचे s_1' और s_1' समान्तर क्रम में जुड़कर दिए परिपथ की वैकल्पिक व्यवस्था प्रदान करेंगी, जिसकी नई डिज़ाइन आकृति 18.10 में प्रदर्शित है।

आकृति 18.10

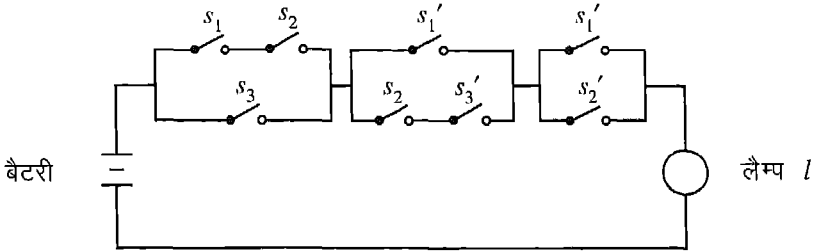
उदाहरण 41 कथन $(p \wedge q \wedge r) \vee [(\sim p) \wedge (\sim q)]$ के लिए एक परिपथ बनाइए।

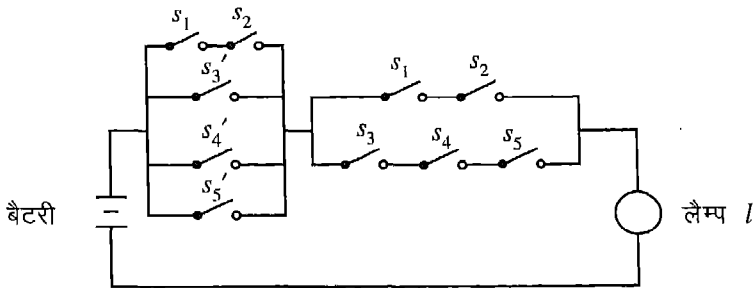
हल मान लीजिए स्विच s_1 कथन p, s_2 कथन q और s_3 कथन r से साहचर्य रखती है, तब $p \wedge q \wedge r$ एक ऐसा परिपथ हैं, जिसमें स्विचें s_1, s_2 और s_3 श्रेणी बद्ध–क्रम में जुड़ी हैं।

आकृति 18.11

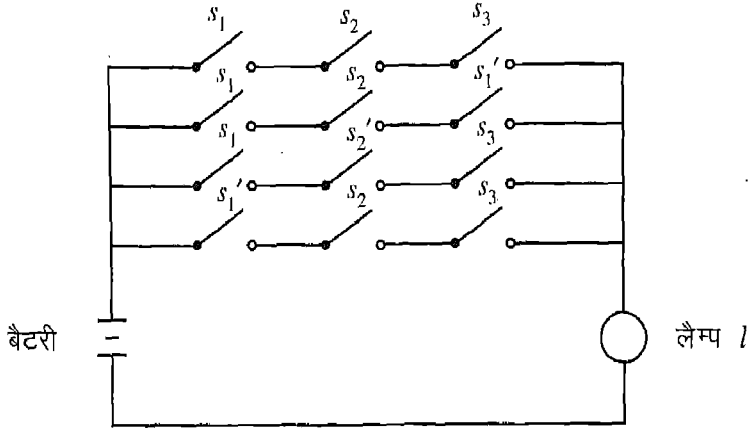
पुनः $\sim p \wedge \sim q$, ऐसी सरकिट निरूपित करता है जिससे स्विचें s_1' और s_2' श्रेणी बद्ध क्रम में जुड़ी हैं और अन्ततः दो सरकिटें जो $p \wedge q \wedge r$ और $\sim p \wedge \sim q$ को व्यक्त करती हैं, समान्तर क्रम में जुड़ी हैं। अतः अभीष्ट परिपथ आकृति 18.11 द्वारा प्रदर्शित है।

प्रश्नावली 18.8

1. आकृति 18.12 की परिपथ को तर्कशास्त्र के प्रतीकात्मक रूप में व्यक्त कीजिए।

आकृति 18.12

2. आकृति 18.12 की परिपथ को तर्कशास्त्र के प्रतीकात्मक रूप में व्यक्त कीजिए।

आकृति 18.13

3. आकृति 18.14 में प्रदर्शित परिपथ के लिए, वैकल्पिक व्यवस्था दीजिए, जिससे नई परिपथ में केवल दो स्विच प्रयुक्त हों।

आकृति 18.14

4. आकृति 18.15 में प्रदर्शित परिपथ के लिए वैकल्पिक व्यवस्था दीजिए, जिससे नई परिपथ में केवल पाँच स्विच प्रयुक्त हों।

आकृति 18.15

5. निम्नांकित कथन के लिए परिपथ बनाइए।

$(p \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge (q \vee \sim r))$

6. निम्नांकित कथन के लिए परिपथ बनाइए।

$(p \wedge \sim q \wedge r) \vee (p \wedge (\sim q \vee \sim r))$

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

तर्क–शास्त्र की प्रथम पुस्तक अरस्तू [Aristotle (384 ई. पूर्व–322 ई. पू.)] द्वारा लिखी गयी। ये निगमन तर्क के लिए नियमों के ऐसे संग्रह थे जो ज्ञान की प्रत्येक शाखा के अध्ययन हेतु प्रयुक्त होने थे। इसके प्रश्चात सतरहवीं शताब्दी में जर्मन गणितज्ञ गाटफ्रीड लाइवनीज [Gottfried Leibnitz (1646–1716 ई.)] ने निगमन तर्क प्रक्रिया के यान्त्रीकरण के लिए प्रतीकों के प्रयोग के लिए विचार बनाया। उनके विचारों को अंग्रेज गणितज्ञ जार्ज बूल [George Boole (1815–1864 ई.)] ने उन्नीसवीं शती में कार्य रूप में परिणित किया। जार्ज बूल और आगस्टस डी मारगन [Augustus De Morgan (1806–1871 ई.) ने आधुनिक विषय "प्रतीकात्मक तर्क–शास्त्र" की आधार शिला स्थापित किए।

साँख्यिकी (STATISTICS)

अध्याय 19

19.1 भूमिका

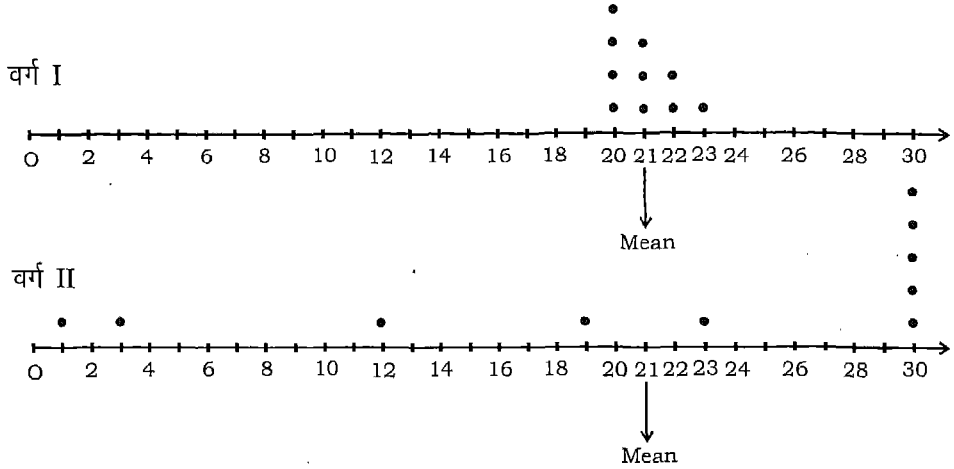
हमने अपनी पिछली कक्षाओं में सीखा है कि साँख्यिकी में हम किसी विशेष उद्देश्य से एकत्रित किए गए आँकड़ों का अध्ययन करते हैं। यह किसी क्षेत्र में लघु उद्योग, स्त्री एवं पुरुष मतदाताओं की संख्या या किसी राज्य के ग्रामीण क्षेत्र में एक हैक्टेयर से अधिक कृषि योग्य भूमि रखने वाले परिवारों की संख्या हो सकती है। साधारणतया ऐसे एकत्रित आँकड़ें असंसाधित होते हैं, जिनका सगंठन तथा वर्गीकरण (वर्गीकृत अथवा अवर्गीकृत) यथाप्राप्त आँकड़ों में करने पर वे एक वर्ग विशेष के गुण–दोष को स्पष्ट करते है। हमने पिछली कक्षाओं में दण्ड–चित्र (Bar-chart) वृत्तारेख (Pie-chart), आयत चित्र (Histogram), बारंबारता बहुभज, (Frequency polygon), बारंबारता वक्र (Frequency curve) तथा संचयी बारंबारता वक्र या तोरण (Ogive) के विषय में अध्ययन किया है, क्योंकि ये निरूपण एक दृष्टि में ध्यान आकर्षित करते हैं तथा दिये गए आँकड़ों की प्रमुख स्थितियों एंव अन्तरों को प्रदर्शित करते हैं।

हमने यथा प्राप्त आँकड़ों की अवस्थिति (अथवा केन्द्रीय प्रवृत्ति) के मापकों—माध्य, माध्यक तथा बहुलक के बारे में भी अध्ययन किया है। हमने वर्गीकृत आँकड़ों के माध्य, सामान्य तथा संक्षिप्त विधियों से ज्ञात किये हैं। हम यह भी जानते हैं कि केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापक प्रेक्षणों के एक समूह का प्रतिनिधित्व करते हैं।

हम दो वर्गों पर विचार करेंगे जिसमें प्रत्येक वर्ग में 10 विद्यार्थी हैं तथा कक्षा परीक्षा में 30 अंकों में से उनके द्वारा प्राप्त अंक दिये गए हैं :

वर्ग	विभिन्न विद्यार्थियों द्वारा प्राप्तांक	वर्ग की औसत
I	21 20 21 22 21 23 20 20 20 22	21
II	1 23 12 19 5 30 30 30 30 30	21

यद्यपि औसत (अथवा माध्य) अंक दोनों वर्गों में समान हैं (यहां 21), तथापि दोनों वर्गों के अंकों के परिसर (range) में भिन्नता है। प्रथम वर्ग के विद्यार्थियों का अंक परिसर (20 से

23) है जबकि दूसरे वर्ग का अंक परिसर 1 से 30 है। यदि हम प्रत्येक वर्ग के लिए संख्या रेखा पर इनके द्वारा प्राप्त अंकों को बिन्दुओं के रूप में अंकित करें, तो हमें निम्न प्राप्त होता है:

आकृति 19.1

आप देखेंगे कि प्रथम वर्ग में अकों के सापेक्ष बिन्दु माध्य के आस–पास हैं तथा एक दूसरे के निकट हैं। हम कह सकते हैं कि वे बिन्दु माध्य के पास एकत्रित हैं जबकि दूसरे वर्ग में सापेक्ष बिन्दु दूर–दूर फैले हूए हैं। इस फैलाव को हम विक्षेपण (Disperson) के नाम से पुकारते हैं। अतः हम यह कह सकते हैं कि इस परीक्षा में दूसरे वर्ग के विद्यार्थी, पहले वर्ग की अपेक्षा अधिक विक्षेपण दिखाते हैं क्या हम अब कह सकते हैं कि केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप हमें एक ऐसा केन्द्रीय मान देते हैं जिसके आस–पास चर के मान स्थित होते हैं परन्तु इससे यह तथ्य स्पष्ट नहीं होता कि यह माध्य से कितनी दूरी तक फैले हुए हैं अतः यह आवश्यक हो जाता है कि माध्य (अथवा माध्यिका) से विक्षेपण के माप की आवश्यकता है जो हमें केन्द्रीय माप से उन आंकड़ों के विक्षेपण की मात्रा को दर्शा सके। यह हमें केन्द्रीय प्रवृत्ति के मानों के अतिरिक्त विक्षेपण के मानों के माप के विषय में पढ़ने की आवश्यकता दर्शाता है।

19.2 माध्य विचलन

हम माध्य से माध्य विचलन तथा माध्यिका से माध्य विचलन के विषय में अवर्गीकृत तथा वर्गीकृत आंकड़ों के लिए अलग–अलग पढ़ेगें।

19.2.1 *माध्य से माध्य विचलन* हम विचलन की सकंल्पना से परिचित हैं। याद कीजिए कि हमने वर्गीकृत आँकड़ों के माध्य की गणना करते समय पद–विचलन की विधि अपनायी थी। वहाँ हमने एक कल्पित माध्य से विचलन लिये थे।

माध्य–विचलन का शाब्दिक अर्थ है दिए गए प्रेक्षणों में किसी निश्चित मान (माध्य, माध्यिका अथवा कोई अन्य मान) से लिए गए विचलनों का माध्य।

स्मरण कीजिए कि केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप प्रेक्षणों के न्यूनतम तथा अधिकतम मानों के बीच रहता है। इस लिए प्राप्त कुछ विचलन ऋणात्मक तथा कुछ धनात्मक होंगे और क्योंकि प्रेक्षणों $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ का माध्य $\bar{x}$ से पद विचलनों का योग शून्य होता है, माध्य से माध्य–विचलन निकालने का कोई औचित्य नहीं है अतः, माध्य विचलन को अर्थ देने के लिए हम प्रत्येक विचलन $(x_i - \bar{x})$ के स्थान पर उसका निरपेक्ष मान, अर्थात $|x_i - x|$ लिखकर उसका योग निकालेंगे, जो निम्न है :

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - x| = |x_1 - x| + |x_2 - x| + |x_3 - x| + \ldots + |x_n - x| \qquad (1)$$

(1) से हमें माध्य से सभी n प्रेक्षणों के विचलनों के निरपेक्ष मानों का योग प्राप्त होता है।

अतः $\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i - \bar{x}|}{n}$ से हमें माध्य से विचलन के निरपेक्ष मानो के कुल योग का माध्य प्राप्त होता है और हम इसे माध्य से n प्रेक्षणों का **माध्य विचलन** कहते हैं

नोट : M.D. $(\bar{x})$, माध्य x से माध्य विचलन को दर्शाता है।

आइए हम माध्य से माध्य विचलन की गणना के लिए आवश्यक पदों को लिखें।

(i) असंसाधित (raw) आँकड़ों के लिए

माना $x_1, x_2, \ldots, x_n$ प्रेक्षण हैं।

माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात करने के लिए, हम निम्न पद अपनाते हैं:

पद 1 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ प्रेक्षणों का माध्य $\bar{x}$ ज्ञात करें

पद 2 *अब प्रत्येक x_i का x से विचलन ज्ञात करें।*

अर्थात $x_1 - x, x_2 - x, x_3 - x, \ldots, x_n - x$

पद 3 $|x_1 - x|, |x_2 - x|, |x_3 - x|, \ldots, |x_n - x|$ ज्ञात करने के पश्चात

$\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|$ ज्ञात करें।

पद 4 सूत्र $\text{M. D.}(\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}$ का प्रयोग करके माध्य से माध्य विचलन [M. D $(\bar{x})$] ज्ञात करें। इसको समझने के लिए आइए एक उदाहरण लें।

उदाहरण 1 निम्न आँकड़ों का माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए:

6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12

हल हम उपरोक्त पदों का प्रयोग करके निम्न पाते हैं

पद 1 $\bar{x} = \frac{6+7+10+12+13+4+8+12}{8} = \frac{72}{8} = 9$

पद 2 प्रेक्षणों के माध्य $\bar{x}$ से क्रमशः विचलन, अर्थात $x_i - x$, हैं

–3, – 2, 1, 3, 4, –5, –1, 3

[जाँच : इन विचलनों का बीजीय योग शून्य होना चाहिए]

पद 3 $\Sigma|x_i - x| = 3 + 2 + 1 + 3 + 4 + 5 + 1 + 3 = 22.$

पद 4 $\text{M.D.}(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{22}{8} = 2.75.$

अतः, दिये गए प्रेक्षणों का माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन 2.75 है।

प्रत्येक बार पदों को लिखने के स्थान पर, हम क्रिया पदों का वर्णन किये बिना भी क्रमानुसार परिकलन क्रिया कर सकते हैं।

आइए एक अन्य उदाहरण लेकर स्पष्ट करें।

उदाहरण 2 निम्न आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए :

12, 3, 18, 17, 4, 9, 17, 19, 20, 15, 8, 17, 2, 3, 16, 11, 3, 1, 0, 5

हल पहले हमें आँकड़ों का माध्य $(\bar{x})$ ज्ञात करना है

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{200}{20} = 10.$$

अतः $x_i - \bar{x}$ क्रमशः हैं

2, –7, 8, 7, –6, –1, 7, 9, 10, 5, –2, 7, –8, –7, 6, 1, –7, –9, –10, –5

अतः $\sum_{i=1}^{20}|x_i - \bar{x}| = 2+7+8+7+6+1+7+9+10+5+2+7+8+7+6+1+7+9+10+5$

$= 124$

तथा $\text{M.D.}(x) = \frac{124}{20} = 6.2$

(ii) वर्गीकृत आँकड़ों के लिए माध्य विचलन

हम बारंबारता वितरण (Frequency distribution) का माध्य निकालने की प्रक्रिया को स्मरण करें। वहाँ, हमने यह माना था कि किसी वर्ग की बारंबारता उसके मध्य बिन्दु पर केन्द्रित है। अतः यदि भिन्न वर्गों के मध्य बिन्दु x_i's है तथा उनकी बारंबारता f_i तथा आँकड़ों का माध्य $\bar{x}$ है, तो माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन निम्न द्वारा प्रदर्शित है :

$$\text{M.D.}(\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i |x_i - \bar{x}|}{\sum_{i=1}^{k} f_i},$$

जहाँ k वर्गों की संख्या है।

आइए अब कुछ उदाहरण लेकर परिकलन क्रिया को स्पष्ट करें।

उदाहरण 3 निम्न आँकड़ों से माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए :

x_i	2	5	6	8	10	12
f_i	2	8	10	7	8	5

हल आइए दिए आँकड़ों की सारणी बनाकर अन्य स्तम्भ परिकलन के बाद लगाएँ :

x_i	f_i	$f_i x_i$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$
2	2	4	5.5	11
5	8	40	2.5	20
6	10	60	1.5	15
8	7	56	0.5	3.5
10	8	80	2.5	20
12	5	60	4.5	22.5
	40	300		92

अतः $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{300}{40} = 7.5$

तथा $\text{M.D.}(\bar{x}) = \frac{92}{40} = 2.3$

उदाहरण 4 निम्न आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य–विचलन ज्ञात कीजिए :

वर्ग :	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
बारंबारता :	2	3	8	14	8	3	2

हल हम निम्न प्रकार की सारणी बनाते हैं :

वर्ग	x_i	f_i	$f_i x_i$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$
10–20	15	2	30	30	60
20–30	25	3	75	20	60
30–40	35	8	280	10	80
40–50	45	14	630	0	0
50–60	55	8	440	10	80
60–70	65	3	195	20	60
70–80	75	2	150	30	60
		40	1800		400

अत: $$x = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1800}{40} = 45$$

तथा $$\text{M.D.}(x) = \frac{400}{40} = 10$$

$\bar{x}$ को पद–विचलन की विधि द्वारा ज्ञात करके हम कठिन परिकलन से बच सकते थे। माना कि आँकड़ों का काल्पनिक माध्य 45 है।

वर्ग	x_i	$d_i = \frac{x_i - 45}{10}$	f_i	$f_i d_i$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \lvert x_i - x \rvert$
10–20	15	–3	2	–6	30	60
20–30	25	–2	3	–6	20	60
30–40	35	–1	8	–8	10	80
40–50	45	0	14	0	0	0
50–60	55	1	8	8	10	80
60–70	65	2	3	6	20	60
70–80	75	3	2	6	30	60
			40	0		400

अतः $\bar{x} = 45 + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} \times i$

$= 45 + 0 = 45$

तथा $\text{M.D.}(x) = \frac{400}{40} = 10$

19.2.2 ***माध्यिका से माध्य विचलन*** स्मरण करें कि असंसाधित आँकड़ों की माध्यिका ज्ञात करने के लिए आँकड़ों को हम पहले आरोही अथवा अवरोही क्रम में रखते हैं और उसके पश्चात् माध्यिका को निम्न नियम द्वारा ज्ञात करते हैं :

यदि प्रेक्षणों की संख्या n विषम है, तो माध्यिका $\left(\frac{n+1}{2}\right)$वां प्रेक्षण है।

यदि n सम है, तो माध्यिका $\left(\frac{n}{2}\right)$वां तथा $\left(\frac{n}{2}+1\right)$वां प्रेक्षणों का माध्य है।

एक बार माध्यिका प्राप्त हो जाने के पश्चात् माध्यिका से माध्य विचलन ज्ञात करने की विधि, माध्य विचलन ज्ञात करने की विधि जैसी ही है केवल एक ही अन्तर है कि यहाँ विचलन माध्यिका से लिये जाते हैं, न कि माध्य से तथा विचलनों के योग को n से भाग दिया जाता है

अर्थात $\text{M. D.(Med.)} = \frac{\sum |x_i - \text{मध्यिका}|}{n}$.

संसाधित आँकड़ों के लिए $\text{M.D.(Med.)} = \frac{\sum f_i |x_i - \text{मध्यिका}|}{\sum f_i}$.

आइए उदाहरण की सहायता से समझें :

उदाहरण 5 निम्न आँकड़ों के लिए माध्यिका से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए :

3, 9, 5, 3, 12, 10, 18, 4, 7, 19, 21

हल यहाँ प्रेक्षणों की संख्या विषम ($n = 11$) है। आँकड़ों को आरोही क्रम में लिखने पर हमें मिलता है :

3, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 18, 19, 21

अब माध्यिका $\frac{(11+1)}{2}$ वां अर्थात् छठवाँ प्रेक्षण है

अतः माध्यिका $= 9$

विचलनों के निरपेक्ष मान $|x_i -$ माध्यिका$|$ क्रमशः है

6, 6, 5, 4, 2, 0, 1, 3, 9, 10, 12

अतः $\Sigma |x_i -$ माध्यिका$| = 58$

इसलिए $\text{M. D.(Med.)} = \frac{58}{11} = 5.27$

उदाहरण 6 निम्न आँकड़ों के लिए माध्यिका से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए :

x_i	3	6	9	12	13	15	21	22
f_i	3	4	5	2	4	5	4	3
संचयी बारंबारता	3	7	12	14	18	23	27	30

हल यहाँ $n = \Sigma f_i = 30$

माध्यिका 15वें तथा 16वें प्रेक्षण का माध्य है। क्योंकि 15वां तथा 16वां प्रेक्षण दोनों 13 है,

अतः माध्यिका $\frac{13+13}{2}$ अथवा 13 है।

$|x_i -$ माध्यिका$|$ के क्रमशः मान हैं : 10, 7, 4, 1, 0, 2, 8, 9

अतः $\Sigma f_i |x_i -$ माध्यिका$| = 30+28+20+2+0+10+32+27$

$= 149$

तथा $\text{M. D.(Med.)} = \frac{\sum f_i |x_i - \text{मध्यिका}|}{\sum f_i}$

$= \frac{149}{30} = 4.99$

प्रश्नावली 19.1

निम्न आँकड़ों के लिए माध्य से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए :

1. 4, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 17

2. 6.5, 5, 5.25, 5.5, 4.75, 4.5, 6.25, 7.75, 8.5

3. 38, 70, 48, 40, 42, 55, 63, 46, 54, 44

4. 13,17,16,14,11,13,10,16,11,18,12,17

5. 36, 72, 46, 42, 60, 45, 53, 46, 51, 49

प्रश्न 6 से 8 में दिए गए आकड़ों के लिए माध्य से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए:

6.

x_i	5	10	15	20	25
f_i	7	4	6	3	5

7.

x_i	10	30	50	70	90
f_i	4	24	28	16	8

8.

x_i	5	7	9	10	12	15
f_i	8	6	2	2	2	6

प्रश्न 9 से 11 में दिए गए आकड़ों के लिए माध्य से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए :

9.

वर्ग	0–100	100–200	200–300	300–400	400–500	500–600	600–700	700–800
बारंबारता	4	8	9	10	7	5	4	3

10.

वर्ग	95–105	105–115	115–125	125–135	135–145	145–155
बारंबारता	9	13	26	30	12	10

11.

वर्ग	0– 10	10– 20	20– 30	30– 40	40– 50	50– 60
बारंबारता	6	8	14	16	4	2

प्रश्न 12 से 14 में दिए गए आकड़ों के लिए माध्यिका से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए :

12. 34, 66, 30, 38, 44, 50, 40, 60, 42, 51

13. 22, 24, 30, 27, 29, 31, 25, 28, 41, 42

14. 38, 70, 48, 34, 63, 42, 55, 44, 53, 47

प्रश्नों 15 तथा 16 के लिए माध्यिका से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए :

15.

x_i	15	21	27	30	35
f_i	3	5	6	7	8

16.

x_i	74	89	42	54	91	94	35
f_i	20	12	2	4	5	3	4

17. यदि $\bar{x}$ माध्य है तथा MD (x) माध्य से माध्य विचलन है, तो $x - \text{MD}(x)$ तथा $x + \text{MD}(x)$ के बीच आने वाले प्रेक्षणों की संख्या ज्ञात कीजिए। प्रश्नों 12, 13 तथा 14 के आँकड़े इसके लिए प्रयोग करें।

18. किसी दुकान में 10 छड़ों की लम्बाई (सेमी में) निम्न हैं :

42.0, 52.3, 55.2, 72.9, 52.8, 79.0, 32.5, 15.2, 27.9, 30.2

(i) M.D. (Med.) ज्ञात कीजिए।

(ii) माध्य से माध्य विचलन भी ज्ञात कीजिए।

19.3 प्रसरण तथा मानक विचलन

याद करें कि केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप से माध्य विचलन ज्ञात करने के लिए हमने विचलनों के निरपेक्ष मानों का योग लिया था। विचलनों के निरपेक्ष मानों को, हमने माध्य विचलन को सार्थक बनाने के लिए लिया था अन्यथा इनका योग शून्य है। यह सच है कि प्रेक्षणों के समूह का माध्य से विचलनों का योग शून्य होता है और इसीलिए हम माध्य से विचलनों का निरपेक्ष मान लेते हैं।

इस कठिनाई से बचने की अन्य विधि है कि माध्य से विचलनों का वर्ग लें ताकि उनका योग ऋणेतर हो। माना $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n प्रेक्षण हैं तथा $\bar{x}$ उनका माध्य है। तब

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - x)^2 + \ldots + (x_n - x)^2 \qquad (1)$$

यदि यह योग शून्य हो, तो प्रत्येक $(x_i - \bar{x})$ शून्य हो जायेगा। इसका अर्थ यह है कि किसी प्रकार का विक्षेपण नहीं है क्योंकि सभी प्रेक्षण x के बराबर हो जाते हैं। यदि $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ छोटा है तो यह इंगित करता है कि प्रेक्षण $x_i, x_2, \ldots, x_n$, माध्य $\bar{x}$ के निकट हैं। इसके विपरीत, यदि

यह योग बड़ा है, तो प्रेक्षणों का माध्य $\bar{x}$ के सापेक्ष विक्षेपण अधिक है। अतः हम कह सकते हैं कि योग $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ सभी प्रेक्षणों का माध्य $\bar{x}$ से विक्षेपण की माप का एक संतोषजनक प्रतीक है।

अब हम दो प्रकार के प्रेक्षणों को लें। पहला प्रेक्षणों का वर्ग A, जिसमें प्रेक्षणों की अधिकतर संख्या माध्य के निकट हो ताकि प्रत्येक प्रेक्षण का माध्य से विचलन थोड़ा है। यह हो सकता है योग $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ का मान किसी दूसरे वर्ग B, जिसमें प्रेक्षणों की संख्या कम हैं तथा उनके माध्य से विचलन अधिक हैं, के तदनुरूपी मान से बड़ा हो। तब हम निष्कर्ष निकालने पर बाध्य होगें कि वर्ग B की अपेक्षा वर्ग A में विक्षेपण अधिक है जबकि परिस्थियां उसके विपरीत हों। आइए इसको एक उदाहरण से स्पष्ट करें। हमारे पास प्रेक्षणों का वर्ग A है, जिसमें प्रत्येक प्रेक्षण माध्य के पास है, तथा प्रेक्षणों का वर्ग B है, जो माध्य से अपेक्षाकृत अधिक दूरी तक फेले हुए हैं :

माना 31 प्रेक्षणों का समुच्चय A निम्न है

15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45 तथा 6 प्रेक्षणों का समुच्चय B, 5, 15, 25, 35, 45, 55 है। दोनों प्रेक्षण वर्गों का माध्य 30 है। समुच्चय B के लिए, हम पाते हैं

$$\sum_{i=1}^{6}(x_i - \bar{x})^2 = (-25)^2 + (-15)^2 + (-5)^2 + 5^2 + 15^2 + 25^2$$

$$= 1750.$$

प्रेक्षणों के समुच्चय A के लिए हम पाते हैं

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = [15^2+14^2+13^2+12^2+11^2+10^2+9^2+8^2+7^2+6^2+5^2+4^2+3^2+2^2+1^2]$$

$$+\left[(-15)^2 + (-14)^2 + (-13)^2 + \ldots + (-5)^2 + (-4)^2 + (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2\right]$$

$$= 2 \times 1240 = 2480.$$

यदि $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ ही माध्य के सापेक्ष विक्षेपण का माप है तो हम कहने के लिए प्रेरित होंगे कि 31 प्रेक्षणों के समुच्चय A का, 6 प्रेक्षणों वाले वर्ग B की अपेक्षा माध्य के सापेक्ष अधिक विक्षेपण है यद्यपि समुच्चय B में 6 प्रेक्षणों का माध्य से बिखराव (विचलनों का परिसर –25 से 25 है), समुच्चय A की अपेक्षा (जिसके विचलनों का परिसर –15 से 15 है) अधिक है।

इस कठिनाई से बचा जा सकता है यदि हम विचलनों के समुच्चय का माध्य लें अर्थात हम निम्न लें

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}.$$

समुच्चय A के लिए, हम पाते हैं

$$\frac{\sum_{i=1}^{31}(x_i - x)^2}{31} = \frac{2480}{31} = 80$$

तथा समुच्चय B के लिए यह $\frac{1750}{6} = 291.7$ है जो कि वांछित है।

व्यंजक $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$ को n प्रेक्षणों $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ का प्रसरण कहा जाता है

प्रसरण (variance) को सामान्यतः चिन्ह σ^2 (सिग्मा का वर्ग) द्वारा निरूपित करते हैं

$\therefore$ n प्रेक्षणों $x_1, x_2, \ldots, x_n$ का विक्षेपण हैः

$$\text{प्रसरण} \quad (\sigma^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

यहाँ यह कहना होगा कि प्रेक्षणों x_i तथा $\bar{x}$ की इकाई, प्रसरण की इकाई से भिन्न है क्योंकि प्रसरण में $(x_i - x)$ के वर्गों का समावेश है। इसी कारण प्रेक्षणों $x_1, x_2, \ldots, x_n$ का माध्य के सापेक्ष विचलन को प्रसरण के वर्गमूल के रूप में लिया जाता है तथा उसे **मानक विचलन** कहा जाता है। मानक विचलन जिसे सामान्यतः σ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है, निम्न प्रकार से दिया जाता है

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2},$$

जहाँ n प्रेक्षणों $x_1, x_2, \ldots, x_n$ का माध्य $\bar{x}$ है

पुनः, जैसा कि माध्य विचलन के लिए किया था, यदि m वर्गों वाली एक बारंबारता सारणी हो जिसमें प्रत्येक वर्ग उसके मध्यमान x_i जिसकी बारंबारता f_i है, द्वारा परिभाषित है, के लिए प्रसरण तथा मानक विचलन निम्न द्वारा परिभाषित किया जाता है :

$$\text{प्रसरण} \quad (\sigma^2) = \frac{\sum_{i=1}^{m} f_i(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{m} f_i}, \text{ यहां } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{m} f_i}$$

$$\text{तथा मानक विचलन } (\sigma) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} f_i(x_i - x)^2}{\sum_{i=1}^{m} f_i}}$$

जहाँ $\bar{x}$ उसी प्रकार परिभाषित है जैसा कि प्रसरण में किया गया है।

टिप्पणी याद करें कि हम यह मानते हैं कि बारंबारता वितरण के लिए किसी वर्ग में बारंबारता उसके मध्यमान पर केन्द्रित होती है।

आइए प्रेक्षणों के वर्ग का प्रसरण तथा मानक विचलन ज्ञात करने के लिए कुछ उदाहरण लें

उदाहरण 7 निम्न आँकड़ों के लिए प्रसरण तथा मानक विचलन ज्ञात कीजिए :

65, 58, 68, 44, 48, 45, 60, 62, 60, 50

हल दिये गए प्रेक्षणों का माध्य है

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{65+58+68+44+48+45+60+62+60+50}{10}$$

$$= \frac{560}{10} = 56$$

$(x_i - \bar{x})^2$ के क्रमशः मान $9^2, 2^2, 12^2, 12^2, 8^2, 11^2, 4^2, 6^2, 4^2$ तथा 6^2 हैं और

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 81+4+144+144+64+121+16+36+16+36$$

$$= 662$$

अतः प्रसरण $(\sigma^2) = \frac{662}{10} = 66.2$

तथा मानक विचलन $(\sigma) = \sqrt{66.2} = 8.13$

उदाहरण 8 निम्न आँकड़ों के लिए प्रसरण तथा मानक विचलन ज्ञात कीजिए :

x_i	4	8	11	17	20	24	32
f_i	3	5	9	5	4	3	1

हल आँकड़ों को सारणी रूप में लिखने पर हमें मिलता है

x_i	f_i	$f_i x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - x)^2$
4	3	12	−10	100	300
8	5	40	−6	36	180
11	9	99	−3	9	81
17	5	85	3	9	45
20	4	80	6	36	144
24	3	72	10	100	300
32	1	32	18	324	324
	30	420			1374

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{420}{30} = 14$$

अतः प्रसरण $(\sigma^2) = \frac{1374}{30} = 45.8$

तथा मानक विचलन $(\sigma) = \sqrt{45.8}$

$= 6.77$

उदाहरण 9 निम्न बंटन के लिए माध्य, प्रसरण तथा मानक विचलन ज्ञात कीजिए

वर्ग	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80	80–90	90–1
बारंबारता	3	7	12	15	8	3	2

हल हम निम्न तालिका बनाते हैं :

वर्ग	x_i (मध्यमान)	f_i	$f_i x_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - x)^2$
30– 40	35	3	105	729	2187
40– 50	45	7	315	289	2023
50– 60	55	12	660	49	588
60– 70	65	15	975	9	135
70– 80	75	8	600	169	1352
80– 90	85	3	255	529	1587
90– 100	95	2	190	1089	2178
		50	3100		10050

अतः माध्य ($\bar{x}$) $= \frac{3100}{50} = 62$

प्रसरण (σ^2) $= \frac{10050}{50} = 201$

तथा मानक विचलन (σ) $= \sqrt{201} = 14.17$

19.4 $\bar{x}$ तथा σ^2 निकालने की लघु विधि

कभी–कभी एक बारंबारता बंटन के x_i अथवा विभिन्न वर्गों के मध्यमान x_i के मान बहुत बड़े हों तो माध्य तथा प्रसरण ज्ञात करना कठिन हो जाता है तथा अधिक समय लेता है। ऐसे बारंबारता बंटन, जिसमें वर्ग अन्तराल समान हों, के लिए इस विधि को अधिक सुगम बनाया जा सकता है। इसे हम लघु विधि कहते हैं। इस विधि के निम्न पद हैं :

(i) एक ऐसी सुविधाजनक संख्या A लें जो सभी x_i का सामान्यतः मध्य बिन्दु हो अथवा मध्य के निकट हो।

(ii) $(x_i - A)$ ज्ञात कीजिए तथा उसे वर्ग अन्तराल i से भाग दें। माना कि इन्हें हम y_i कहें, तब

$$y_i = \frac{x_i - A}{i} \text{ or } x_i = A + iy_i \quad (1)$$

हम जानते हैं $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$ (2)

(1) तथा (2) में से x_i के मान रखने पर, हम पाते हैं

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i (A + i\, y_i)}{\sum f_i}$$

$$= A\frac{\sum f_i}{\sum f_i} + i\frac{\sum f_i y_i}{\sum f_i}$$

$$= A + i\,\frac{\sum f_i y_i}{\sum f_i} = A + i\,\bar{y}$$

तथा $\sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}$

$$= \left[\frac{\sum f_i (A + iy_i - A - i\,\bar{y})^2}{\sum f_i}\right] \text{[क्योंकि } x_i = A + iy_i \text{ तथा } \bar{x} = A + i\,y\text{]}$$

$$= \frac{i^2 \sum f_i (y_i^2 + \bar{y}^2 - 2\bar{y}.y_i)}{\sum f_i}$$

$$= \frac{i^2}{\sum f_i}\left[\sum f_i y_i^2 + n\,y^2 \;\; -2n\,y^2\right] \text{[क्योंकि } \sum f_i = n \text{ तथा } \sum f_i y_i = n\,y\text{]}$$

$$= \frac{i^2}{\sum f_i}\left[\left(\sum f_i y_i^2 - n\,y^2\right)\right]$$

$$= \frac{i^2}{\sum f_i}\left[\sum f_i y_i^2 - \frac{\left(\sum f_i y_i\right)^2}{\sum f_i}\right].$$

आइए हम उदाहरण 9 को लघु विधि से हल करें, जैसा कि नीचे दिखाया गया है :

उदाहरण 10 निम्न बारंबारता बंटन के लिए माध्य, प्रसरण तथा मानक विचलन ज्ञात कीजिए :

वर्ग	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80	80–90	90–100
बारंबारता	3	7	12	15	8	3	2

हल माना कि कल्पित माध्य 65 है। यहाँ $i = 10$

आइए हम इसे तालिका रूप में निम्न प्रकार से लिखें।

वर्ग	x_i	$y_i = \frac{x_i - 65}{10}$	f_i	$f_i y_i$	$f_i y_i^2$
30– 40	35	–3	3	– 9	27
40– 50	45	–2	7	– 14	28
50– 60	55	–1	12	– 12	12
60– 70	65	0	15	0	0
70– 80	75	1	8	8	8
80– 90	85	2	3	6	12
90– 100	95	3	2	6	18
			50	– 15	105

$$\bar{x} = \left[65 - \frac{15}{50} \times 10\right] = 62.$$

$$\text{प्रसरण} \quad (\sigma^2) = \frac{(10)^2}{50 \times 50} [50 \times 105 - 225] = 201.$$

तथा मानक विचलन $(\sigma) = \sqrt{201} = 14.17.$

प्रश्नावली 19.2

निम्न आँकड़ों के लिए माध्य तथा प्रसरण ज्ञात कीजिए :

1. 6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12

2. 2, 4, 5, 6, 8, 17

3. प्रथम n प्राकृत संख्याएँ

प्रश्नों 4 तथा 5 के लिए माध्य तथा मानक विचलन ज्ञात कीजिए :

4.

x_i	6	10	14	18	24	28	30
f_i	2	4	7	12	8	4	3

5.

x_i	92	93	97	98	102	104	109
f_i	3	2	3	2	6	3	3

अपने परिणामों की लघु–विधि द्वारा जांच कीजिए।

6. लघु विधि का प्रयोग करके निम्न आँकड़ों के लिए माध्य तथा मानक विचलन ज्ञात कीजिए :

x_i	60	61	62	63	64	65	66	67	68
f_i	2	1	12	29	25	12	10	4	5

प्रश्नों 7 तथा 8 में दिए गए बारंबारता बंटन के लिए माध्य तथा प्रसरण ज्ञात कीजिए :

7.

वर्ग	0–30	30–60	60–90	90–120	120–150	150–180	180–210
बारंबारता	2	3	5	10	3	5	2

8.

वर्ग	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
बारंबारता	5	8	15	16	6

9. लघु विधि द्वारा माध्य, प्रसरण तथा मानक विचलन ज्ञात करें :

वर्ग अन्तराल	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80	80–90	90–100
बारंबारता	3	4	7	7	15	9	6	6	3

10. एक डिजाइन में खींचे गए वृत्तों के व्यास मि.मी. में, नीचे दिये गए हैं :

व्यास (मि.मी.)	33–36	37–40	41–44	45–48	49–52
वृत्तों की संख्या	15	17	21	22	25

वृत्तों के माध्य व्यास तथा मानक विचलन का परिकलन कीजिए

[संकेत : पहले वर्गों को 32.5–36.5, 36.5–40.5, 40.5–44.5, 44.5–48.5, 48.5–52.5 लिखकर आँकड़ों को सतत बनाएँ और फिर आगे बढ़ें]

11. निम्न आँकड़ों से ज्ञात कीजिए कि कौन सा वर्ग अधिक प्रसरण दिखाता है

वर्ग	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
वर्ग A (बारंबारता)	9	17	32	23	40	18	1
वर्ग B (बारंबारता)	18	22	40	18	32	8	2

[संकेत : दोनों वर्गों के प्रसरण ज्ञात करें। वह वर्ग, जिसका प्रसरण अधिक है अधिक प्रसरण दिखाता है]

12. निम्न आँकड़ों के लिए लघु विधि द्वारा माध्य तथा प्रसरण ज्ञात कीजिए :

वर्ग	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	35–40	40–45
बारंबारता	20	24	32	28	20	11	26	15	24

विविध उदाहरण

उदाहरण 11 20 प्रेक्षणों का प्रसरण 5 है। यदि प्रत्येक प्रेक्षण को 2 से गुणा कर दिया जाए, तो परिणामी प्रेक्षणों का नया प्रसरण ज्ञात कीजिए

हल माना प्रेक्षण $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{20}$ हैं तथा उनका माध्य $\bar{x}$ है। अत:

$$5 = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2$$

या $$\sum_{i=1}^{20}(x_i - x)^2 = 100 \qquad (1)$$

यदि प्रत्येक प्रेक्षण को 2 से गुणा किया जाए, तो परिणामी प्रेक्षण हैं

$$2x_1, 2x_2, 2x_3, \ldots, 2x_n.$$

उनका माध्य $\overline{X} = \dfrac{2(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}{n} = 2x$

तथा नया प्रसरण $= \dfrac{1}{20}\sum\left(2x_i - X\right)^2$

$$= \frac{1}{20}\sum(2x_i - 2x)^2$$

$$= \frac{4}{20}\sum(x_i - x)^2 \qquad (2)$$

$\Sigma(x_i - \bar{x})^2 = 100$ को (1) से (2) में रखने पर हमें प्राप्त होता है

नया प्रसरण $= \dfrac{4}{20} \times 100 = 20 = 2^2 \times 5.$

टिप्पणी पाठक ध्यान दें कि यदि प्रत्येक प्रेक्षण बिन्दु को n से गुणा किया जाए, तो नये बने प्रेक्षणों का प्रसरण, पूर्व प्रसरण का n^2 गुना हो जाता है।

उदाहरण 12 5 प्रेक्षणों का माध्य 4.4 है तथा उनका प्रसरण 8.24 है। यदि तीन प्रेक्षण 1, 2 तथा 6 हैं, तो अन्य दो प्रेक्षण ज्ञात कीजिए।

हल माना शेष दो प्रेक्षण x तथा y हैं। तब

माध्य $= 4.4 = \dfrac{1+2+6+x+y}{5}$

अथवा $x + y = 13 \qquad (1)$

तथा प्रसरण =

$$8.24 = \frac{(1-4.4)^2 + (2-4.4)^2 + (6-4.4)^2 + (x-4.4)^2 + (y-4.4)^2}{5}$$

अथवा $41.2 = (3.4)^2 + (2.4)^2 + (1.6)^2 + x^2 + y^2 - 8.8\,(x+y) + 2.(4.4)^2$

$$= 11.56 + 5.76 + 2.56 + x^2 + y^2 - 8.8(x+y) + 38.72$$

अथवा $41.20 = x^2 + y^2 + 58.60 - 114.4$ ($x + y = 13$ का प्रयोग करके)

अथवा $x^2 + y^2 = 97 \qquad (2)$

लेकिन (1) से हमे मिलता है

$$x^2 + y^2 + 2xy = 169 \quad (3)$$

अतः, (2) तथा (3) से हमे मिलता है

$$2xy = 72 \quad (4)$$

(4) को (2) में से घटाने पर, हमे मिलता है

$$(x - y)^2 = 25,$$

अर्थात $\quad x - y = \pm 5 \quad (5)$

अतः, (1) तथा (5) से हमे मिलता है

$$x = 9, y = 4, \text{ जबकि } x - y = 5$$

अर्थात $\quad x = 4, \; y = 9$, जब $x - y = -5$

अतः, शेष दो प्रेक्षण 9 तथा 4 हैं

उदाहरण 13 यदि प्रेक्षणों $x_1, x_2, \ldots, x_n$ को $x_1 + y, x_2 + y, x_3 + y, \ldots, x_n + y$ में बदला जाए, जहाँ y एक ऋणात्मक अथवा धनात्मक संख्या है, तो दिखाइए कि प्रसरण में कोई बदलाव नहीं आयेगा।

हल माना प्रेक्षणों $x_1, x_2, \ldots, x_n$ का माध्य $\bar{x}_1$ है। तो उनका प्रसरण निम्न है :

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_1)^2$$

यदि प्रत्येक प्रेक्षण में y जोड़ा जाए तो नये प्रेक्षणों का माध्य $\bar{x}_2 = \bar{x}_1 + y$ तथा नया प्रसरण निम्न से दिया जाता है :

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i + y - x_2)^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i + y - x_1 - y)^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_1)^2 = \sigma_1^2$$

अतः नये प्रेक्षणों का प्रसरण वही है जो मूल प्रेक्षणों का था।

टिप्पणी ध्यान दीजिए कि प्रेक्षणों के किसी वर्ग में प्रत्येक प्रेक्षण में एक धन (ऋण) संख्या को जोड़ने अथवा घटाने पर प्रसरण में कोई अन्तर नहीं आता।

अध्याय 19 पर विविध प्रश्न

1. 8 प्रेक्षणों का माध्य तथा प्रसरण क्रमशः 9 तथा 9.25 हैं। यदि इनमें से छः प्रसरण 6, 7, 10, 12, 12 तथा 13 हैं, तो शेष दो प्रेक्षण ज्ञात कीजिए।

2. 7 प्रेक्षणों का माध्य तथा प्रसरण क्रमशः 8 तथा 16 है। यदि इनमें से पांच प्रेक्षण 2, 4, 10, 12, 14 हैं, तो शेष दो प्रेक्षण ज्ञात कीजिए।

3. छः प्रेक्षणों का माध्य तथा मानक विचलन क्रमशः 8 तथा 4 है। यदि प्रत्येक प्रेक्षण को 3 से गुणा कर दिया जाए, तो परिणामी प्रेक्षणों का नयाा माध्य तथा नया मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

4. यदि n प्रेक्षणों $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ का माध्य $\bar{x}$ तथा प्रसरण σ^2 है, तो सिद्ध कीजिए कि प्रेक्षणों $ax_1, ax_2, ax_3, \ldots, ax_n$ का माध्य $a\bar{x}$ तथा प्रसरण $a^2\sigma^2$ है $(a \neq 0)$।

5. 20 प्रेक्षणों का माध्य तथा मानक विचलन क्रमशः 10 तथा 2 है। जांच करने पर यह पाया गया कि प्रेक्षण 8 गलत है। सही माध्य तथा मानक विचलन निम्न में से प्रत्येक के लिए ज्ञात कीजिए :

   (i) यदि गलत प्रेक्षण हटा दिया जाए।

   (ii) यदि उसे 12 से बदल दिया जाए।

भाग ख (अध्याय 20 – 21)
चयनित–विज्ञान के विद्यार्थियों के लिए

त्रि–विमीय ज्यामिति का परिचय

अध्याय 20

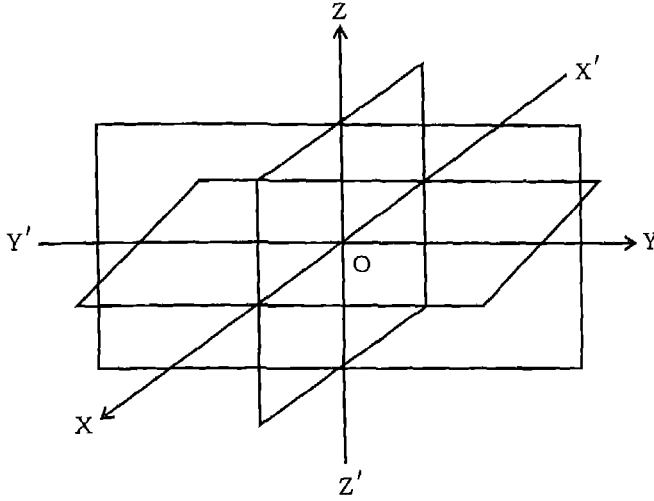
(INTRODUCTION TO THREE-DIMENSIONAL GEOMETRY)

20.1 भूमिका

हम जानते हैं, कि किसी तल में स्थित एक बिन्दु की स्थिति–निर्धारण के लिए हमें दो संख्याओं की आवश्यकता पड़ती है जो उस बिन्दु की उस तल में स्थित दो परस्पर लम्ब प्रतिच्छेदित रेखाओं से लाम्बिक दूरियों को व्यक्त करती हैं। इन रेखाओं को निर्देशांक्ष और उन दो संख्याओं को उस बिन्दु के निर्देशांक (coordinates) कहते हैं। वास्तविक जीवन में हमारा केवल एक तल में स्थित बिन्दुओं से ही सम्बन्ध नहीं रहता है। उदाहरणतः अन्तरिक्ष में फेंके गए एक गेंद की विभिन्न समय में स्थिति अथवा एक स्थान से दूसरे स्थान तक जाने के दौरान वायुयान की एक विशिष्ट समय में स्थिति आदि, को भी जानने की आवश्यकता पड़ती है।

ठीक इसी प्रकार एक कमरे की छत से लटकते हुये एक विद्युत–बल्ब की निचली नोक अथवा छत के पंखे की नोक की स्थिति को निधारित करने के लिए हमें उन बिन्दुओं की दो परस्पर लम्ब दीवारों से दूरियां मात्र ही पर्याप्त नहीं है, बल्कि उस बिन्दु की, कमरे के फर्श से उंचाई, की भी आवश्कता पड़ती है। अतः हमे केवल दो नहीं बल्कि तीन संख्याओं की आवश्यकता होती है, जो बिन्दु की दो परस्पर लम्ब दीवारों से दूरियां, तथा उस कमरे के फर्श से उँचाई को व्यक्त करती हैं। कमरे की दो परस्पर लम्ब दीवारों तथा उस क्षैतिज का फर्श तीन परस्पर प्रतिच्छेदित करने वाले तल हैं। इन परस्पर प्रतिच्छेदित करने वाले तलों से लम्ब दूरियों को व्यक्त करने वाली तीन संख्याएं उस बिन्दु के उन तीन निर्देशांक तलों के सापेक्ष निर्देशांक कहलाते हैं। इस प्रकार अन्तरिक्ष (Space) में स्थित एक बिन्दु के तीन निर्देशांक होते हैं। इस अध्याय में हम त्रि–विमीय अन्तरिक्ष में ज्यामिति की मूलभूत संकल्पनाओं का अध्ययन करेंगे।

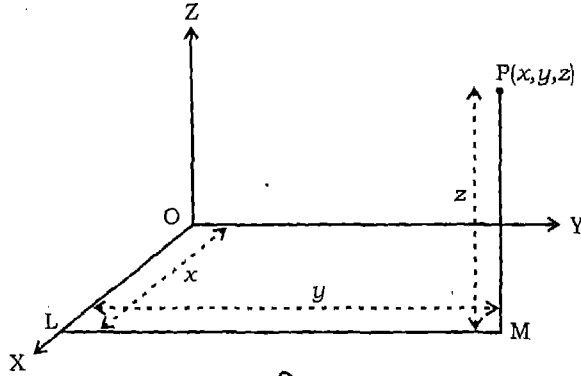
20.2 त्रि–विमीय अन्तरिक्ष में निर्देशांक्ष और निर्देशांक–तल

बिन्दु O पर प्रतिच्छेदित करने वाले तीन परस्पर लम्ब तलों की कल्पना कीजिए (आकृति 20.1)। ये तीनों तल, रेखाओं X' 0X, Y' OY और Z' OZ पर प्रतिच्छेतिद करते हैं जिन्हें क्रमशः x-अक्ष, y-अक्ष और z-अक्ष कहते हैं।

आकृति 20.1

हम स्पष्टतः देखते हैं कि उपर्युक्त तीनों रेखाएं परस्पर लम्ब हैं। इन्हें हम समकोणिक निर्देशांक निकाय कहते हैं। तलों XOY, YOZ और ZOX, को क्रमशः XY–तल, YZ–तल तथा ZX–तल, कहते हैं। ये तीनों तल निर्देशांक्ष तल कहलाते हैं। हम कागज के तल को XOY तल लेते हैं और Z'OZ रेखा को तल XOY पर लम्बवत लेते हैं। यदि कागज के तल को क्षैतिजतः रखें तो Z'OZ रेखा ऊर्ध्वारतः होती है। XY–तल से OZ की दिशा में ऊपर की ओर नापी गई दूरियां धनात्मक और OZ' की दिशा में नीचे की ओर नापी गई दूरियां ऋणात्मक होती हैं। ठीक उसी प्रकार ZX–तल के दाहिने OY दिशा में नापी गई दूरियां धनात्मक और ZX–तल के बाएं OY' की दिशा में नापी गई दूरियां ऋणात्मक होती हैं। YZ–तल के सम्मुख OX दिशा में नापी गई दूरियां धनात्मक तथा इसके पीछे OX' की दिशा में नापी गई दूरियां ऋणात्मक होती हैं। बिन्दु O को निर्देशांक निकाय का मूल बिन्दु कहते हैं। तीन निर्देशांक्ष तल अन्तरिक्ष को आठ भागों में बांटते हैं, इन अष्टाशों के नाम XOYZ, X'OYZ, XOY'Z, X'OY'Z, XOYZ, X'OYZ', XOY'Z' और X'OY'Z' हैं।

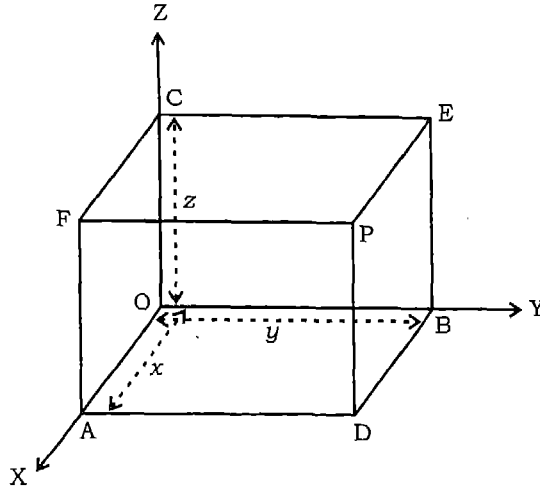
20.3 अन्तरिक्ष में एक बन्दु के निर्देशांक

अन्तरिक्ष में निर्देशांक्षों, निर्देशांक तलों और मूल बिन्दु सहित निर्देशांक्ष–निकाय के चयन के पश्चात दिए बिन्दु के तीन निर्देशांक (x,y,z) को ज्ञात करने की विधि तथा विलोमतः तीन संख्याओं के त्रिदिक (triplet) दिए जाने पर अन्तरिक्ष में संगत बिन्दु के निर्धारण करने की विधि की अब हम विस्तार से व्याख्या करते हैं।

अन्तरिक्ष में दिए गये बिन्दु P से XY – तल पर लम्ब PM खींचते है जिसका पाद M है (आकृति 20.2)। M से X–अक्ष पर ML लम्ब खींचिए, जो उससे L पर मिलता है। मान लीजिए OL = x, LM = y और PM = z. तब (x, y, z) बिन्दु P के निर्देशांक कहलाते हैं। इसमें x, y, z को क्रमशः बिन्दु P के x–निर्देशांक, y–निर्देशांक तथा z–निर्देशांक कहते हैं। आकृति 20.2 में हम देखते हैं कि बिन्दु P(x, y, z) अष्टांश XOYZ में

आकृति 20.2

स्थित है, अतः x, y और z सभी धनात्मक हैं। यदि P किसी अन्य अष्टांश में हो तो x,y और z के चिन्ह तदनुसार परिवर्तित हो जाते हैं। इस प्रकार अन्तरिक्ष में स्थित किसी बिन्दु की संगतता वास्तविक संख्याओं के क्रमित त्रिदिक (x,y,z) से होती है।

विलोमतः किसी त्रिदिक (x,y,z) के दिए जाने पर हम x के संगत x–अक्ष पर बिन्दु L निर्धारित करते हैं। पुनः XY – तल में बिन्दु M निर्धारित करते हैं, जहां इसके निर्देशांक (x, y) हैं। ध्यान दीजिए कि LM या तो x–अक्ष पर लम्ब अथवा y–अक्ष के समान्तर है। बिन्दु M पर पहुँचने के पश्चात हम XY–तल पर MP लम्ब खींचते हैं, इस पर बिन्दु P को z के संगत निर्धारित करते हैं। इस प्रकार निर्धारित बिन्दु P के निर्दशांक (x, y, z) हैं। अतः अन्तरिक्ष में स्थित बिन्दुओं की वास्तविक संख्याओं के क्रमित त्रिदिक (x, y, z) से सदैव एकैक–सगंतता रखते है।

विकल्पतः, अन्तरिक्ष में स्थित बिन्दु P से हम निर्देशांक तलों के समान्तर तीन तल खींचते हैं, जो x–अक्ष, y–अक्ष और z–अक्ष को क्रमशः A, B तथा C बिन्दुओं पर प्रतिच्छेदित करते हैं (आकृति 20.3)। यदि OA = x, OB = y और OC = z, तो बिन्दु P के निर्देशांक x, y और z होते हैं और इसे हम P (x, y, z) के रूप में लिखते हैं। विलोमतः, x, y और z के दिए जाने पर हम निर्देशाक्षों पर बिन्दु A, B तथा C निर्धारित करते हैं। बिन्दु A, B तथा C से हम क्रमशः YZ–तल, ZX–तल तथा XY–तल के समान्तर तीन तल खीचतें हैं। इन तीनों तलों ADPF, BDPE तथा CEPF का प्रतिच्छेदन बिन्दु स्पष्टतः P है, जो क्रमित–त्रिदिक (x, y, z) के संगत है।

आकृति 20.3

टिप्पणी बिन्दु O के निर्देशांक (0, 0, 0) हैं। x–अक्ष पर स्थित किसी बिन्दु के निर्देशांक $(x, 0, 0)$ और YZ–तल में स्थित किसी बिन्दु के निर्देशांक $(0, y, z)$ होते हैं।

उदाहरण 1 आकृति 20.3 में यदि P के निर्देशांक (x, y, z) हैं, तो F के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल बिन्दु F के लिए OY के अनुदिश नापी गयी दूरी शून्य है अतः इसके निदेर्शांक (x, o, z) हैं।

उदाहरण 2 आकृति 20.3 में यदि P के निर्देशांक (x, y, z) हैं तो बिन्दु P के XY–तल में परावर्तन (प्रतिबिम्ब) के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल P का प्रतिबिम्ब XY–तल के उतने ही नीचे होगा जितना P, XY– तल से उपर है। इस प्रकार P के निर्देशांक $(x, y, -z)$ हैं।

प्रश्नावली 20.1

1. आकृति 20.3, में यदि P के निर्देशांक (a, b, c) हैं तो बिन्दुओं A, D, B, C और E के निर्देशांक लिखें।
2. बिन्दु (x, y, z) से निर्देशांक तलों की लम्बवत् दूरियां ज्ञात कीजिए। (x, y और z सभी को धनात्मक मान लें)।
3. आकृति 20.3 में बिन्दु P के (i) YZ–तल (ii) ZX–तल में प्रतिबिम्ब के निर्देशांक ज्ञात करें।

4. उन अष्टांशों के नाम बताइए, जिसमें निम्नलिखित बिन्दु स्थित हैं।

   (i) (3,1,2) (ii) (–3,1,2) (iii) (3,–1,2)

   (iv) (3,1,–2) (v) (–3,–1,2) (vi) (–3,–1,–2)

   (vii) (3,–1,–2) (viii) (–3,1,–2).

5. एक बिन्दु के निर्देशांक (1, –2, 7) हैं। उन सात बिन्दुओं के निर्देशांक लिखिए, जिनके निरपेक्ष मान वही हैं जो दिए गए बिन्दु के हैं।

6. बिन्दु (a, b, c) से निर्देशांक्षो पर डाले गये लम्ब–पादों के निर्देशांक लिखिए।

7. दिए गए बिन्दुओं का निर्दिष्ट तल में प्रतिबिम्ब ज्ञात कीजिए।

   (i) (–3, 4, 7) का YZ–तल में

   (ii) (–7, 2, –1) का ZX–तल में

   (iii) (5, 4, –3) का XY–तल में

   (iv) (–4, 0, 1) का ZX–तल में

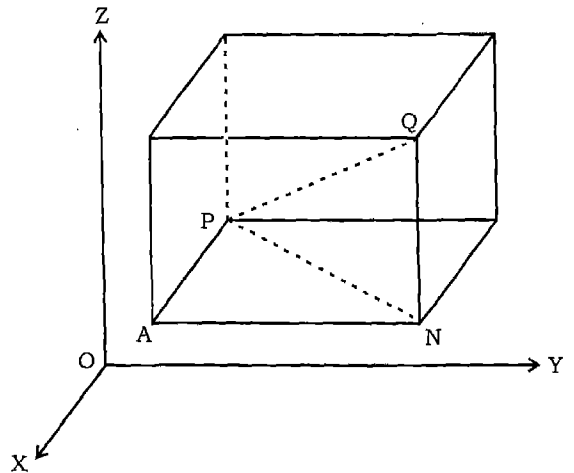
   (v) (–2, 0, 0) का XY–तल में

8. बिन्दु P (a, b, c) की निर्देशाक्षों से लाम्बिक दूरियां ज्ञात कीजिए।

9. बिन्दुओं (3, 0, –1) और (–2, 5, 4) से निर्देशांक तलों के समान्तर तल खींचे गये हैं। इस प्रकार निर्मित समान्तर षटफलकीय (parallelopiped) कोरों की लम्बाईयां ज्ञात कीजिए।

20.4 दो बिन्दुओं के बीच की दूरी

दैनिक जीवन में हमें प्रायः अन्तरिक्ष के दो बिन्दुओं के बीच की दूरी की आवश्यकता पड़ती है। यहाँ हम दो बिन्दुओं के बीच की दूरी उनके निर्देशांकों के रूप में ज्ञात करते हैं।

अन्तरिक्ष में दो बिन्दु $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ पर विचार कीजिए। बिन्दुओं P तथा Q से निर्देशांक तलों के समान्तर तल खींचिए, जिससे हमें ऐसा घनाभ मिलता है जिसका विकर्ण PQ है (आकृति 20.4)।

आकृति 20.4

चूंकि $\angle$ PAN = 1 समकोण, अत:

(1) $PN^2 = PA^2 + AN^2$

पुन: चूंकि $\angle$ PNQ = 1 समकोण, इसलिए

(2) $PQ^2 = PN^2 + NQ^2$

(1) और (2) से हमें प्राप्त होता है, कि

$$PQ^2 = PA^2 + AN^2 + NQ^2$$

अब, $PA = x_2 - x_1$, $AN = y_2 - y_1$ और $NQ = z_2 - z_1$.

इस प्रकार, $PQ^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2$, जिससे

$$PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\ .$$

यह दो बिन्दुओं P (x_1, y_1, z_1) और Q (x_2, y_2, z_2) के बीच की दूरी PQ के लिए सूत्र है।

यदि दोनों में से एक बिन्दु मूल बिन्दु O(0,0,0) और दूसरा $P(x,y,z)$, हो तो

$$OP = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

उदाहरण 3 बिन्दुओं P (1, –3, 4) और Q (–4, 1,2) में दूरी ज्ञात कीजिए।

हल अभीष्ट दूरी

$$PQ = \sqrt{(1-(-4))^2+(-3-1)^2+(4-2)^2}$$

$$= \sqrt{5^2+(-4)^2+2^2} = \sqrt{25+16+4} = \sqrt{45}$$

उदाहरण 4 दूरी सूत्र के प्रयोग द्वारा सिद्ध करें कि बिन्दु P(–2, 3, 5), Q(1, 2, 3) और R (7, 0,–1) संरेख हैं।

हल यहाँ

$$PQ = \sqrt{(1+2)^2+(2-3)^2+(3-5)^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$

$$QR = \sqrt{(7-1)^2+(0-2)^2+(-1-3)^2} = \sqrt{36+4+16}$$

$$= \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

और $PR=\sqrt{(7+2)^2+(0-3)^2+(-1-5)^2}=\sqrt{81+9+36}=\sqrt{126}=3\sqrt{14}$

इस प्रकार $PQ + QR = \sqrt{14}+2\sqrt{14}=3\sqrt{14} = PR$. अतः बिन्दु P, Q और R संरेख हैं।

प्रश्नावली 20.2

1. निम्नलिखित बिन्दु–युग्मों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।
   (i) (2,3,5), (4,3,1) (ii) (–3, 7, 2), (2, 4, –1)
   (iii) (–1, 3, –4), (1, –3, 4) (iv) (2, –1, 3), (–2, –1, 3)
2. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (–3, 7, 2), (2, 4, –1) और (12, –2, –7) संरेख हैं।
3. सत्यापित कीजिए कि बिन्दु (3, –2, 4), (1, 0, –2) और (–1, 2, –8) संरेख हैं।
4. दर्शाइए कि बिन्दु (0, 7, 10), (–1, 6,6) और (–4, 9, 6) एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।
5. दर्शाइए कि बिन्दु (0, 7, –10), (1, 6, –6) और (4, 9, –6) एक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।
6. दर्शाइए कि बिन्दु (–1, 2, 1), (1,–2,5), (4, –7, 8) और (2, –3, 4) एक समान्तर चतुर्भुज के शीर्ष हैं।
7. सत्यापित कीजिए कि बिन्दु (–1, –6, 10), (1, –3, 4), (–5, –1, 1) और (–7, –4, 7) एक सम–चतुर्भुज के शीर्ष हैं।
8. दर्शाइए कि बिन्दु (–2,6, –2), (0, 4, –1), (–2, 3, 1) और (–4, 5,0) एक वर्ग के शीर्ष हैं।
9. दर्शाइए कि बिन्दु (a, b, c), (b, c, a) और (c, a, b) एक समबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।
10. चार बिन्दुओं $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ और (0, 0, 0) से समदूरस्थ बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

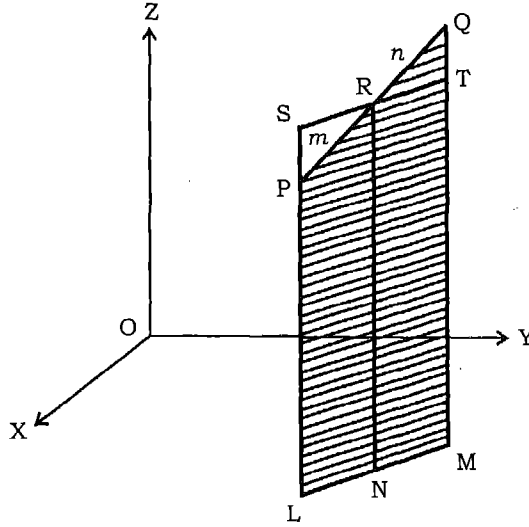
20.5 विभाजन सूत्र

स्मरण कीजिए कि द्वि–विमीय ज्यामिति के समकोणिक कार्तीय निर्देशांक निकाय के अध्याय 10 में एक रेखा–खण्ड को अन्ततः और वाह्यतः दिए अनुपात में विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात किए गये थे। इस अनुभाग में हम दो बिन्दुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाली रेखा खण्ड को $m:n$ के अनुपात में अन्ततः और वाह्यतः विभाजित करने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात करेगें।

मान लिजिए कि बिन्दु $R(x,y,z)$ रेखा खण्ड PQ को अन्ततः $m : n$ के अनुपात में विभक्त करता है। XY–तल पर PL, QM और RN लम्ब खींचिए (आकृति 20.5)। स्पष्टतः यह तीनों लम्ब एक ही तल में स्थित हैं तथा समान्तर हैं। बिन्दु L, M और N उस रेखा पर स्थित हैं जो

उस तल और XY–तल के प्रतिच्छेदन से बनती है। बिन्दु R से रेखा LNM के समान्तर रेखा SRT खींचिए। यह रेखा खींचे गये तल में स्थित है तथा रेखा LP (विस्तारित) को S और MQ को T पर प्रतिच्छेदित करती है। जैसा आकृति 20.5 में प्रदर्शित है।

स्पष्टतः LNRS और NMTR समान्तर चतुर्भुज हैं।

त्रिभुजों PSR और QTR स्पष्टतः समरूप हैं। इसलिए

आकृति 20.5

$$\frac{m}{n}=\frac{PR}{QR}=\frac{SP}{QT}=\frac{SL-PL}{QM-TM}=\frac{RN-PL}{QM-RN}=\frac{z-z_1}{z_2-z}$$

इसप्रकार $z=\dfrac{mz_2+nz_1}{m+n}$

ठीक इसी प्रकार हम पाते हैं, कि $x=\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}, y=\dfrac{my_2+ny_1}{m+n}$

अतः बिन्दु R जो रेखाखण्ड PQ को $m:n$ में अन्ततः विभाजित करता है, के निर्देशांक हैं,

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\frac{my_2+ny_1}{m+n},\frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right).$$

आप स्मरण करें कि यह परिणाम दो विमीय ज्यामिति में प्राप्त किए गये परिणाम के समरूप ही है।

बिन्दुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाली रेखा–खण्ड PQ के मध्य बिन्दु के निर्देशांक $m = n = 1$ रखने पर प्राप्त किए जा सकते हैं जो इस प्रकार हैं :

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

टिप्पणी

1. यदि बिन्दु R, रेखा–खण्ड PQ को वाह्यतः $m:n$ में विभाजित करता हो तो इसके निर्देशांक उपरोक्त सूत्र में n को $-n$ से विस्थापित करके प्राप्त किए जाते हैं। इस प्रकार R के निर्देशांक हैं:

$$\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}, \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right).$$

2. रेखा–खण्ड PQ को K:1 के अनुपात में अन्ततः विभाजित करने वाले बिन्दु R के निर्देशांक हैं :

$$\left(\frac{Kx_2+x_1}{K+1}, \frac{Ky_2+y_1}{K+1}, \frac{Kz_2+z_1}{K+1}\right).$$

यह परिणाम प्रायः दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा पर व्यापक बिन्दु सम्बन्धी प्रश्नों के हल करने में प्रयुक्त होता है।

उदाहरण 5 PQ को वाह्यतः 2:1 में विभक्त करने वाले बिन्दु R के निर्देशांक ज्ञात कीजिए। सत्यापित कीजिए कि Q, PR का मध्य–बिन्दु है।

हल मान लीजिए कि P और Q के निर्देशांक क्रमशः (x_1, y_1, z_1) और (x_2, y_2, z_2) हैं। अब बिन्दु R जो PQ को वाह्यतः 2:1 में विभक्त करता है, के निर्देशांक हैं

$$\left(\frac{2x_2-x_1}{2-1}, \frac{2y_2-y_1}{2-1}, \frac{2z_2-z_1}{2-1}\right),$$

अर्थात $(2x_2-x_1, 2y_2-y_1, 2z_2-z_1)$.

पुनः हम देखतें हैं कि PR के मध्य बिन्दु के निर्देशांक हैं

$$\left(\frac{2x_2-x_1+x_1}{2}, \frac{2y_2-y_1+y_1}{2}, \frac{2z_2-z_1+z_1}{2}\right),$$

अर्थात, (x_2, y_2, z_2) जो बिन्दु Q के निर्देशांक हैं।

प्रश्नावली 20.3

1. बिन्दुओं (–2, 3, 5) और (1, –4, –6) को मिलाने से बने रेखा–खण्ड को अनुपात (i) 2:3 में अन्ततः (ii) 2:3 में बाह्यतः विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

2. बिन्दुओं P (0, 0, 0) और Q (4, –1, –2) को मिलाने वाले रेखा–खण्ड को 1:2 में बाह्यतः विभक्त करने वाले बिन्दु R के निर्देशांक ज्ञात कीजिए। सत्यापित कीजिए कि बिन्दु O रेखा–खण्ड PQ का मध्य बिन्दु है।

3. विभाजन सूत्र का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (2, –3, 4), (–1, 2, 1) और $\left(0, \frac{1}{3}, 2\right)$ संरेख हैं।

   [संकेत : प्रथम दो बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखा–खण्ड को विभाजित करने वाला व्यापक बिन्दु ज्ञात कीजिए, तथा दिखाइये कि K = 2 रखने पर तीसरा बिन्दु मिलता है।]

4. सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज की माध्यिकाएं संगामी होती हैं। यह भी सिद्ध कीजिए कि संगमन बिन्दु माध्यिकाओं को 2:1 के अनुपात में विभक्त करता है। इस बिन्दु को क्या कहते हैं?

5. सिद्ध कीजिए कि चतुष्फलक (tetrahedron) के शीर्षों से संमुख फलक के केन्द्रक को मिलाने वाली रेखाएँ संगामी होती हैं।

   [संकेत : चतुष्फलक ABCD में AG_1 (G_1 त्रिभुज BCD का केन्द्रक है) को 3:1 में विभक्त करने वाले बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए। प्राप्त परिणाम के सममितता से अभीष्ट परिणाम सिद्ध कीजिए।]

20.6 दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा की दिक्–कोज्याएं और दिक्–अनुपात (Direction Cosines and Direction Ratios)

आइए दो प्रतिच्छेदित करने वाली रेखाओं के बीच बने कोण की संकल्पना को स्मरण करें। यदि रेखाएं समान्तर हैं तो उनके बीच का कोण शून्य होता है। त्रि–विमीय अन्तरिक्ष में हमारा ऐसी रेखाओं से सामना होता है जो न तो प्रतिच्छेदन करती हैं और न समान्तर होती हैं। रेखाओं के ऐसे जोड़ों को विषम तलीय रेखाऐं (Skew lines) कहते हैं। यदि दो रेखाएं न तो समान्तर हों और न प्रतिच्छेदन करती हों, तो हम एक ही बिन्दु से दोनों के समान्तर रेखाएं खीचते हैं। इस उभयनिष्ट बिन्दु से दोनों के समान्तर खींची गई रेखाओं के बीच का कोण ही उन दोनों रेखाओं के बीच का कोण कहलाता है।

परिभाषा किसी रेखा की दिक्–कोज्याएँ (Direction Cosines) उस रेखा द्वारा निर्देशांक्षों की धनात्मक दिशा के साथ बनाए गए कोणों की कोज्याएं (Cosines) होती हैं।

इस प्रकार यदि रेखा द्वारा x, y और z अक्षों के साथ बने कोण क्रमशः α, β और γ हों तो $\cos\alpha$, $\cos\beta$ और $\cos\gamma$ उस दी गई रेखा की दिक् कोज्याएं हैं इन्हें संक्षिप्ततः दि. को. लिखा जाता है।

किसी रेखा की दिक्–कोज्याओं को प्रायः l, m, n द्वारा व्यक्त किया जाता है। इस प्रकार

$$l = \cos \alpha, m = \cos \beta, n = \cos \gamma.$$

हम देखते हैं कि x–अक्ष की दिक्–कोज्याएं 1, 0, 0 हैं y–अक्ष की दिक्–कोज्याएं 0, 1, 0 हैं और z–अक्ष की कोज्याएं 0, 0, 1 हैं।

कोई तीन संख्याएं जो किसी रेखा के दिक्–कोज्याओं के समानुपाती होती हैं उन्हें उस रेखा के दिक्–अनुपात (direction ratios) कहते हैं। संक्षिप्ततः इन्हें रेखा का दि. अ. लिखते हैं। इस प्रकार यदि l, m, n दिक्–कोज्याओं वाली रेखा के दिक्–अनुपात a, b, c हों तो

$$\frac{a}{l} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n}$$

हम यह देख सकते हैं कि किसी रेखा की दिक्–कोज्याएं परिमाण की दृष्टि में अद्वितीय (unique) होती हैं, परन्तु एक रेखा के दिक्–अनुपात अनेक हो सकते हैं। वस्तुतः l, m, n दिक् कोज्याओं वाली रेखा के दिक्–अनुपात kl, km, kn हैं, जहां k कोई अशून्य वास्तविक संख्या है।

किसी रेखा की दिक्–कोज्याएं एक सर्वसमिका (identity) को संतुष्ट करती है, जिसे हम निम्नलिखित ढंग से व्युत्पन्न करते हैं।

l, m, n दिक्–कोज्याओं वाली रेखा की कल्पना कीजिए। इस रेखा के समान्तर मूल–बिन्दु से एक अन्य रेखा खींचिए। इस रेखा पर P (x, y, z) कोई बिन्दु लीजिए। P से x–अक्ष पर लम्ब PA खींचिए (आकृति 20.6)।

आकृति 20.6

यदि $\quad OP = r$, तो

$$\cos \alpha = \frac{OA}{OP} = \frac{x}{r},$$

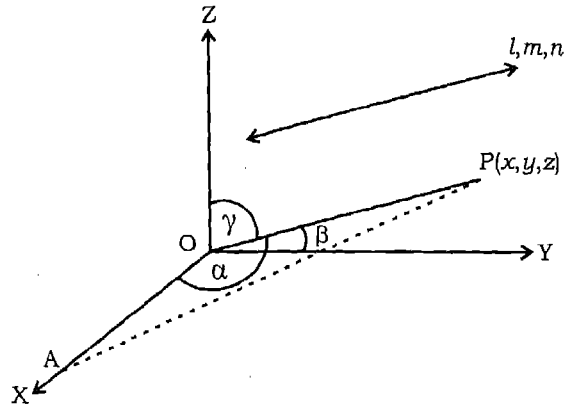
जिससे $\quad x = l r$ प्राप्त होता है

इसी प्रकार, $y = mr$ और $z = nr$.

उपरोक्त संबन्धों को वर्ग करके जोड़ने पर हम पाते हैं कि

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 (l^2 + m^2 + n^2).$$

परन्तु हम जानते हैं कि $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

अत : $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

इस प्रकार किसी रेखा की दिक्–कोज्याएं l, m, n निम्नाकिंत सर्वसमिका को संतुष्ट करती है।

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

पुनः यदि l, m, n दिक्–कोज्याओं वाली रेखा के दिक्–अनुपात a, b, c हों तो

$$\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c} = \pm\frac{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

इस प्रकार $l = \pm\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, m = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, n = \pm\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$,

जहां किसी एक संदर्भ में एक ही चिन्ह (धनात्मक या ऋणात्मक) का प्रयोग किया जाता है।

ध्यान दें कि यदि l, m, n किसी रेखा की दिक्–कोज्याएं हों, तो उस रेखा की दिक्–कोज्याएं $-l, -m, -n$ भी हैं।

हम जानते हैं कि, दिए बिन्दुओं से होकर जाने वाली रेखा अद्वितीय होती है। दो बिन्दुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$ से जाने वाली रेखा के दिक्–अनुपातों तथा उसके दिक्–कोज्याओं की संगणना हम निम्नवत् करते हैं।

मान लीजिए कि PQ की दिक्–कोज्याएं l, m, n हैं। यदि x–अक्ष के धनात्मक दिशा के साथ यह रेखा कोण α बनाती है तो PQ का x–अक्ष पर प्रक्षेप

$$(x_2 - x_1) = PQ \cos\alpha = PQ.\, l$$

अतः $$PQ = \frac{x_2 - x_1}{l}.$$

इसी प्रकार PQ के y– तथा z– अक्षों पर प्रक्षेप का विचार करने से हम पाते हैं कि

$$PQ = \frac{y_2 - y_1}{m}$$

और $$PQ = \frac{z_2 - z_1}{n}.$$

PQ के मानों को बराबर रखने पर हम पाते हैं कि,

$$\frac{x_2 - x_1}{l} = \frac{y_2 - y_1}{m} = \frac{z_2 - z_1}{n} = PQ.$$

अतः बिन्दुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ से जाने वाली रेखा के दिक्–अनुपात $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ होते हैं।

इनसे PQ रेखा के दिक्–कोज्याएं इस प्रकार हैं।

$$\pm\frac{x_2-x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},$$

$$\pm\frac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},$$

$$\pm\frac{z_2-z_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}.$$

उदाहरण 6 दर्शाइए कि बिन्दु (2, 3, 4), (–1, –2, 1), (5, 8,7) सरेंख हैं।

हल बिन्दु P (2, 3, 4) और Q (–1, –2, 1) को मिलाने वाली रेखा PQ के दिक्–अनुपात

2 – (–1), 3– (–2), 4 –1, अर्थात् 3, 5, 3 हैं।

पुनः P(2, 3, 4) और R(5, 8, 7) को मिलाने वाली रेखा के दिक्–अनुपात

5 – 2, 8 – 3, 7 – 4, अर्थात् 3, 5, 3 हैं।

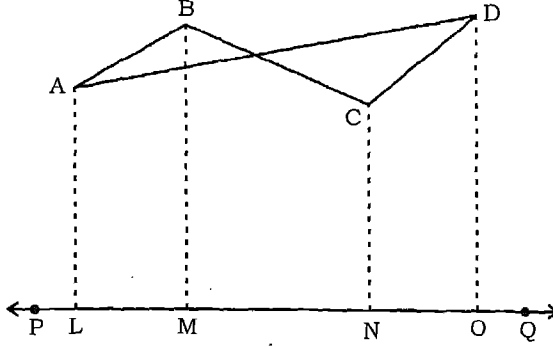
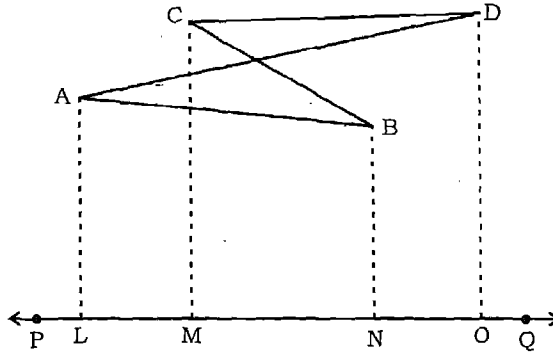
इस प्रकार PQ और PR समान्तर हैं लेकिन बिन्दु P उभयनिष्ठ है इसलिए P,Q और R संरेख हैं।

प्रश्नावली 20.4

1. एक रेखा निर्देशाक्षों से 90°, 60° और 30° के कोण बनाती है। इसकी दिक्–कोज्याएं ज्ञात कीजिए।
2. एक रेखा निर्देशांक्षों से समान कोण पर झुकी है। उसकी दिक्–कोज्याएं ज्ञात कीजिए।
3. निम्नलिखित बिन्दु–युग्मों को मिलाने वाली रेखा के दिक्–अनुपात तथा दिक्–कोज्याएं ज्ञात करें।
   (i) (–2, 1, 0), (3, 2, 1) (ii) (–1, –1, –1), (2, 3, 4).
4. दर्शाइए कि बिन्दु (–1, 2, –3), (4, 5, 1) और (9, 8, 5) संरेख हैं।
5. दर्शाइए कि बिन्दु (4, 7, 8), (2, 3, 4) से जाने वाली रेखा बिन्दु (–1, –2, 1), (1, 2, 5) से जाने वाली रेखा के समान्तर है।

20.7 दो बिन्दुओं को मिलाने से बने रेखा–खण्ड का दी गई रेखा पर प्रक्षेप

हम जानते हैं कि एक रेखा–खण्ड का दी गयी रेखा पर प्रक्षेप रेखा–खण्ड की लम्बाई तथा रेखा–खण्ड और रेखा के बीच के कोण की कोज्या का गुणनफल होता है। सरलता पूर्वक यह

देखा जा सकता है कि रेखा–खण्डों AB, BC और CD के PQ पर प्रक्षेपों का बीजीय योगफल रेखा–खण्ड AD का PQ पर प्रक्षेप के समान होता है (आकृति 20.7 (i) और (ii))।

आकृति 20.7 (i)

आकृति 20.7 (ii)

AD का PQ पर प्रक्षेप

$$LO = LM + MN + NO \text{ (आकृति 20.7 (i))}$$

और $LO = LN - MN + MO$ (आकृति 20.7 (ii)).

दोनों स्थितियों में हम देखते हैं कि

LO = AB, BC और CD के PQ पर प्रक्षेपों का बीजीय योगफल।

व्यापकतः इस परिणाम को निम्नलिखित रूप में पुनः उल्लेखित किया जा सकता है। एक रेखा–खण्ड का दी गई रेखा पर प्रक्षेप, दिए गए रेखा–खण्ड के खण्डित रेखा–खण्डों द्वारा दी गई रेखा पर प्रक्षेपों के बीजीय योगफल के समान होता है। आकृति 20.7 में हम देखते हैं, कि

AD रेखाखण्ड के सिरों को जोड़ने वाले खण्डित रेखा–खण्ड AB, BC और CD हैं।

दो बिन्दु $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ दिए गये हैं और l, m, n दिक्–कोज्याओं वाली एक रेखा भी ज्ञात है। अब हम एक रेखा–खण्ड PQ के दी गई रेखा पर प्रक्षेप के लिए पदावली (expression) प्राप्त करते हैं। आकृति 20.4 में हम देख सकते हैं कि,

$$PA = x_2-x_1,\ AN = y_2-y_1 \text{ and } NQ = z_2-z_1$$

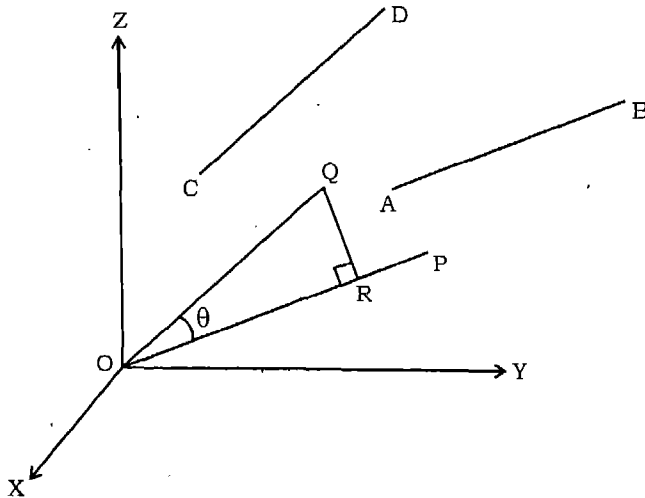
दी गई रेखा निर्देशाक्षों के साथ जो कोण बनाती है उसकी कोज्याएं l, m, n हैं। अतः PA, AN और NQ के दी गई रेखा पर प्रक्षेप क्रमशः $(x_2-x_1)\, l$, $(y_2-y_1)m$ और $(z_2-z_1)n$ हैं।

अब PQ का दी गई रेखा पर प्रक्षेप, खण्डित रेखा–खण्डो PA, AN और NQ के दी गयी रेखा पर प्रक्षेपों के योगफल के समान है। अतः PQ रेखा–खण्ड का दी गई रेखा पर अभीष्ट प्रक्षेप

$$l\,(x_2-x_1) + m\,(y_2-y_1) + n\,(z_2-z_1) \text{ है।}$$

हम इस परिणाम को दो रेखाओं के बीच कोण को ज्ञात करने में प्रयोग करेंगे।

20.8 ज्ञात दिक्–अनुपातों वाली दो रेखाओं के बीच का कोण

l_1, m_1, n_1 और l_2, m_2, n_2 दिक्–कोज्याओं वाली दो रेखाओं क्रमशः AB और CD पर विचार कीजिए। मूल बिन्दु O से हम दो रेखाएं OP और OQ क्रमशः AB और CD के समान्तर खींचते हैं। स्पष्टतः $\angle POQ$ ही दी गई रेखाओं AB और CD के बीच कोण है। (आकृति 20.8)। मान लीजिए कि यह कोण θ है, तथा OP और OQ की दिक्–कोज्याएं क्रमशः l_1, m_1, n_1 और $l_2, m_2,$

आकृति 20.8

n_2 हैं। यदि $OQ = r \neq 0$, तो बिन्दु Q के निर्देशांक $(l_2 r, m_2 r, n_2 r)$ हैं।

पूर्व भाग में प्राप्त परिणाम का प्रयोग करने पर हम OQ का OP पर प्रक्षेप निम्नलिखित पाते हैं

$$OR = l_1 (l_2 r - 0) + m_1 (m_2 r - 0) + n_1 (n_2 r - 0)$$

$$= (l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2) r$$

परन्तु $OR = OQ \cos \theta = r \cos \theta.$

इसलिए $r \cos\theta = (l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2) r$

जिससे हम पाते हैं $\cos \theta = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2.$

$\sin \theta$ का मान ज्ञात करने के लिए हम देखते हैं कि,

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

$$= (l_1^2 + m_1^2 + n_1^2)(l_2^2 + m_2^2 + n_2^2) - (l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2)^2$$

$$= (l_1 m_2 - l_2 m_1)^2 + (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2 + (n_1 l_2 - n_2 l_1)^2.$$

अतः $$\sin \theta = \sqrt{(l_1 m_2 - l_2 m_1)^2 + (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2 + (n_1 l_2 - n_2 l_1)^2}.$$

और $$\tan \theta = \frac{\sqrt{(l_1 m_2 - l_2 m_1)^2 + (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2 + (n_1 l_2 - n_2 l_1)^2}}{l_1 l_2 + m_1 m_1 + n_1 n_2}.$$

टिप्पणी रेखाओं के लम्ब होने के अतिरिक्त अन्य स्थितियों में $\cos \theta$ का मान धनात्मक अथवा ऋणात्मक हो सकता है जो θ के न्यूनकोण अथवा अधिक कोण होने पर निर्भर करता है।

यदि दोनों रेखाओं के दिक्–कोज्याओं के स्थान पर उनके दिक्–अनुपात a_1, b_1, c_1 और a_2, b_2, c_2 दिए हों तो उनके बीच का कोण θ, निम्नलिखित सूत्रों से ज्ञात किया जा सकता है।

$$\cos \theta = \pm \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)}\sqrt{(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)}}$$

और $$\sin \theta = \frac{\sqrt{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 + (c_1 a_2 - c_2 a_1)^2}}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

तथा $\tan\theta = \pm\frac{\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2+(b_1c_2-b_2c_1)^2+(c_1a_2-c_2a_1)^2}}{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}$.

ध्यान देने योग्य है कि $\tan\theta$ का मान वही है चाहे दिक्–कोज्याएं या दिक्–अनुपात दिए गए हों।

दो रेखाओं के परस्पर लम्ब होने का प्रतिबन्ध यदि l_1, m_1, n_1 और l_2, m_2, n_2 दिक्–कोज्याओं वाली रेखाएं परस्पर लम्ब हैं तो

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \text{ अतः } \cos\theta = 0$$

इस प्रकार दो रेखाएं परस्पर लम्ब होंगी यदि

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0.$$

समतुल्यतः $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$,

जहां a_1, b_1, c_1 और a_2, b_2, c_2 दो रेखाओं की दिक्–अनुपात हैं।

दो रेखाओं के समान्तर होने पर प्रतिबन्ध यदि दो रेखाऐं जिनकी दिक्–कोज्याएं l_1, m_1, n_1 और l_2, m_2, n_2 हैं, समान्तर हों तो $\theta = 0$

इस प्रकार $\sin\theta = 0$ इसलिए,

$$(l_1m_2 - l_2m_1)^2 + (m_1n_2 - m_2n_1)^2 + (n_1l_2 - n_2l_1)^2 = 0$$

फलतः $l_1m_2 - l_2m_1 = 0,\ m_1n_2 - m_2n_1 = 0,\ n_1l_2 - n_2l_1 = 0$

अर्थात $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$

समतुल्यतः $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$,

जहां a_1, b_1, c_1 और a_2, b_2, c_2 दोनों रेखाओं के दिक्–अनुपात हैं।

उदाहरण 7 बिन्दु P (3, –1, 2) और Q (2, 4, –1) को मिलाने वाली रेखा–खण्ड का –1, 2, –2 दिक्–अनुपात वाली रेखा पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।

हल –1, 2, –2 दिक्–अनुपात वाली रेखा की $-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}$ दिक्–कोज्याएं हैं।

अतः PQ का दी गई रेखा पर प्रक्षेप

$$-\frac{1}{3}(2-3) + \frac{2}{3}(4+1) - \frac{2}{3}(-1-2), \text{ अर्थात् } \frac{17}{3}.$$

उदाहरण 8 2,3,6 और 1,2,–2 दिक् अनुपातों वाली दो रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

हल दोनों रेखाओं के बीच का कोण θ के लिए

$$\cos\theta = \pm \frac{2\times1+3\times2+6\times(-2)}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}$$

$$= \pm\frac{-4}{21}$$

न्यूनकोण θ के लिए $\cos\theta = \frac{4}{21}$ अतः $\theta = \cos^{-1}\frac{4}{21}$.

प्रश्नावली 20.5

1. दिक्–कोज्याओं $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{-6}{7}$ वाली रेखा पर बिन्दुओं (2, –3, 0), (0, 4, 5) को मिलाने वाली रेखा–खण्ड का प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।
2. दिक्–अनुपात 3, –6, 2 वाली रेखा पर बिन्दुओं (1, 2, 3), (4, 3, 1) को मिलाने वाले रेखा–खण्ड का प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।
3. दिक्–अनुपातों 2, –1, –2 और 6, –2, 3 वाली रेखाओं के बीच बना न्यूनकोण ज्ञात कीजिए।
4. दिक्–अनुपातों 3, –6, 2 और 1, –2, –2 वाली रेखाओं के बीच बना अधिककोण ज्ञात कीजिए।
5. दिखाइए कि बिन्दुओं (1, –1, 2) और (3, 4, –2) को मिलाने वाली रेखा बिन्दुओं (0, 3, 2) और (3, 5, 6) को मिलाने वाली रेखा पर लम्ब है।

विविध उदाहरण

उदाहरण 9 एक रेखाखण्ड का निर्देशांक्षों पर प्रक्षेप 6, 2 और 3 है। रेखा–खण्ड की लम्बाई तथा दिक्–कोज्याएं ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि रेखा खण्ड की लम्बाई r है तथा इसकी दिक्–कोज्याएं l, m, n हैं।

हम जानते हैं, कि रेखा–खण्ड के प्रक्षेप, अक्षों पर lr, mr और nr होते हैं। इसलिए $lr = 6$, $mr = 2$ और $nr = 3$

फलतः $r^2(l^2 + m^2 + n^2) = 6^2 + 2^2 + 3^2 = 49.$

अतः $r^2 = 49$, i.e., $r = 7$.

इसप्रकार $l = \frac{6}{7}, m = \frac{2}{7}$ और $n = \frac{3}{7}$.

अतः रेखा की लम्बाई 7 इकाई तथा इसकी दिक्–कोज्याएं $\frac{6}{7}, \frac{2}{7}$ और $\frac{3}{7}$ हैं।

उदाहरण 10 बिन्दुओं P(–9, 4, 5) और Q(11, 0, –1) को मिलाने वाली रेखा पर मूल–बिन्दु से डाले गये लम्ब के पाद के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल रेखा PQ पर किसी बिन्दु R के निर्देशांक

$$\left(\frac{11K-9}{K+1}, \frac{0K+4}{K+1}, \frac{-K+5}{K+1}\right),$$

जहां K एक अचर है और जिसे ज्ञात करना है।

मूल बिन्दु O को बिन्दु R से मिलाने वाली रेखा के दिक्–अनुपात हैं,

$$\frac{11K-9}{K+1}, \frac{4}{K+1}, \frac{-K+5}{K+1}.$$

लेकिन बिन्दु P और Q से जाने वाली रेखा के दिक्–अनुपात 20, –4, –6 हैं।

अब K का वह मान ज्ञात करना है जिससे मूल बिन्दु से रेखा PQ पर लम्ब का पाद R हो जाये। चूंकि OR रेखा PQ पर लम्ब है इसलिए

$$\frac{20(11K-9)}{K+1} + \frac{-4\times4}{K+1} + \frac{-6(-K+5)}{K+1} = 0$$

फलतः 220 K–180–16+6K–30 = 0, अर्थात K = 1.

अतः अभीष्ट लम्ब पाद के निर्देशांक

$$\left(\frac{11-9}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5-1}{2}\right),$$ अर्थात् (1, 2, 2) हैं।

अध्याय 20 पर विविध प्रश्नावली

1. बिन्दु (5, 0, 2) और (3, –2, 5) से निर्देशांक तलो के समान्तर तल खींचे गये हैं। इस प्रकार निर्मित घनाभ (आयताकार षटफलकीय) के कोरों की लम्बाइयां ज्ञात कीजिए।
2. 5 इकाई भुजा वाले एक घन का एक शीर्ष (1, 0, –1) है और इस शीर्ष से जाने वाली तीन कोरें क्रमशः x और y अक्षों के ऋणात्मक तथा z– अक्ष के धनात्मक दिशाओं के समान्तर हैं, घन के अन्य शीर्षों तथा केन्द्र के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
3. चार बिन्दु जिनके निर्देशांक (2,0,0), (0,–1,0), (0,0,5) और (0,0,0) हैं, से समदूरस्थ बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए। इस बिन्दु की दिए गये चारों बिन्दुओं से दूरी भी ज्ञात कीजिए।
4. A (3,2,0), B (5,3,2), C(–9,6,–3) एक त्रिभुज के शीर्ष हैं। ∠BAC का समद्विभाजक AD, BC से D पर मिलता है। बिन्दु D के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
5. बिन्दुओं (2,4,–3) और (–3,5,4) को मिलाने वाला रेखा–खण्ड, XY–तल द्वारा जिस अनुपात में विभक्त होता है, उसे ज्ञात कीजिए।

6. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (0,4,1), (2,3,–1), (4,5,0) और (2,6,2) एक वर्ग के शीर्ष हैं।
7. सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समान्तर तथा लम्बाई में उससे आधी होती है।
8. यदि l_1, m_1, n_1 और l_2, m_2, n_2 दो परस्पर लम्ब रेखाओं के दिक्–कोज्याएं हैं तो दर्शाइए कि इन दोनों पर लम्ब रेखा की दिक्–कोज्याएं $m_1n_2-m_2n_1,\ n_1l_2-n_2l_1,\ l_1m_2-l_2m_1$ हैं।
9. सत्यापित कीजिए कि $\frac{l_1+l_2+l_3}{\sqrt{3}}, \frac{m_1+m_2+m_3}{\sqrt{3}}, \frac{n_1+n_2+n_3}{\sqrt{3}}$ ऐसी रेखा की दिक्–कोज्याएं हैं जो $l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2$ और l_3, m_3, n_3, दिक्–कोज्याओं वाली तीन परस्पर लम्ब रेखाओं से समान कोण पर झुकी हुई हैं।
10. यदि एक रेखा एक घन के चार विकर्णों के साथ α, β, γ और δ कोण बनाती है तो सिद्ध कीजिए कि,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta = \frac{4}{3}$$

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

1637 ई० में वैश्लेषिक ज्यामिति के जनक रेने डेकार्टे [Rene' Descartes (1596 – 1650 A.D.)] ने तलीय ज्यामिति के क्षेत्र में उल्लेखनीय कार्य किया। इनके सहआविष्कारक पियरे फर्मा [Pierre Fermat (1601–1665 A.D.)] और लॉ हीरे La Hire (1640 – 1718 A.D.)ने भी इस क्षेत्र में कार्य किया। यद्यपि इन लोगों के कार्यों में त्रिविमीय ज्यामिति के सम्बन्ध में सुझाव है, परन्तु विशद विवेचन नहीं है। डेकार्टे को त्रिविमीय अन्तरिक्ष में विन्दु के निर्देशांको के विषय में जानकारी थी परन्तु उन्होने इसे विकसित नहीं किया।

1715 ई० में जे वरनौली [J. Bernoulli (1667 – 1748 A.D.)] के लाइवनिज [Leibnitz] को लिखे पत्र में तीन निर्देशांक तलों का परिचय उल्लेखित है जिसे हम आज प्रयोग कर रहे हैं।

सर्वप्रथम सन 1700 ई० में फ्रेन्च ऐकेडमी को प्रस्तुत किए गए अन्टोनी पैरेन्ट [Antoinne Parent (1666 – 1716 A.D.)] के लेख में वैश्लेषिक ठोस ज्यामिति के विषय में विस्तृत विवेचन है।

एल. आयलर [L. Euler, (1707 – 1783 A.D.)] ने सन् 1748 में प्रकाशित अपनी पुस्तक 'ज्यामिति का परिचय' के दूसरे खण्ड के परिशिष्ट के 5 वें अध्याय् में त्रिविमीय निर्देशांक ज्यामिति का सुव्यवस्थित एंव क्रमवद्ध वर्णन प्रस्तुत किया।

उन्नीसवीं शती के मध्य के बाद ही ज्यामिति का तीन से अधिक आयामों में विस्तार किया गया, जिसका सर्वोतम प्रयोग आइनस्टीन के सापेक्षवाद के सिद्वान्त में स्थान–समय अनुक्रमण (Space–Time Continuum) में द्रष्टव्य है।

सदिश गणित (VECTOR ALGEBRA)

अध्याय 21

21.1 भूमिका

गणित, भौतिकी और इन्जीनियरिंग में प्रायः ऐसी राशियों से सामना पड़ता है, जिनमें केवल परिमाण होते हैं, उदाहरणतः द्रव्यमान, समय और ताप आदि। इन्हें अदिश राशियां कहते हैं। इनके विपरीत अनेक भौतिक राशियाँ ऐसी होती हैं, जिनमें केवल परिमाण ही नहीं, बल्कि दिशा भी होती है, उदाहरणतः विस्थापन, वेग त्वरण, बल संवेग, कोणीय संवेग, विद्युतक्षेत्र–तीव्रता और पराविधुत ध्रुवण आदि। राशियां जिनमें परिमाण और दिशा दोनों होते हैं, उन्हें सदिश राशियाँ कहते हैं।

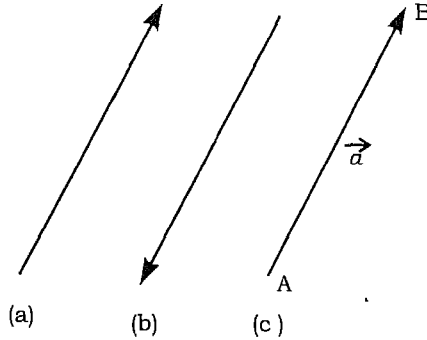
सदिश का लाभ पूर्णतः तभी प्राप्त हो सकता है, जब उनके ज्यामितीय प्रगुणों के साथ ही साथ उनके बीजगणितीय गुणधर्मों का प्रयोग किया जाय। हम समकोणिक निर्देशांक निकाय से पूर्व परिचित हैं। सदिशों और ज्यामिति के बीच संगतता निर्देशांक निकाय में एक बिन्दु की एक सदिश से साहचर्य स्थापित करके आरम्भ की जा सकती है। इस प्रकार का एक निकाय द्वि–विमीय या त्रि–विमीय ज्यमिति में प्रत्येक बिन्दु की संगतता संख्याओं के एक क्रमित–युग्म या त्रिक से करता है, और इन प्रत्येक क्रमित युग्म या त्रिक् का साहचर्य हम एक सदिश से करा सकते हैं। सदिशों और संख्याओं के बीच की संगतता, एवं सदिश विधियों का प्रयोग रैखिक समीकरण, ज्यामिति, चलन–कलन और यान्त्रिकी के अध्ययन करने की अनुमति देती है। इस प्रकार का अध्ययन भौतिक विज्ञान से लेकर इन्जीनियरिंग तक के विविध क्षेत्रों में उपयोगी और महत्वपूर्ण सिद्ध हो चुका है। अब इसके अनुप्रयोगों का विस्तार अर्थशास्त्र और अन्य सामाजिक–विज्ञान के क्षेत्रों में होने लगा है।

21.2 सदिश (Vectors)

ऐसी राशियाँ जिनमें परिमाण और दिशा दोनों होती हैं, उन्हें निरूपित करने के लिए सदिशों का प्रयोग किया जा सकता है। ऐसी भी राशियाँ हैं, जिनमें केवल परिमाण होते हैं, और दिशा नहीं होती है, वे अदिश राशियाँ (*scalar quantities*) कहलाती हैं। जैसा कि अंग्रेजी भाषा का शब्द

स्केलर इंगित करता है कि स्केलर राशियाँ, मापी जा सकती हैं, अर्थात वास्तविक राशियों के पैमाने पर उनकी तुलना की जा सकती हैं अदिश ऐसी राशियां हैं, जिनमें केवल परिमाण ही होता है, किन्तु दिशा नहीं होती है।

परिभाषा – सदिश ऐसी राशि है जिनमें परिमाण और दिशा दोनों होते हैं।

आकृति 21.1(a), (b) और (c), में हम तीन समान्तर रेखाएं देखते हैं और दो विभिन्न दिशाएं हैं, जिनका साहचर्य इन रेखाओं से कराया जा सकता है, जैसा कि तीर द्वारा प्रदर्शित है। एक रेखा जो इन दिशाओं में से किसी एक द्वारा निदेशित होती है, उसे दिष्ट रेखा कहते हैं। यदि एक परिमाण (मान लीजिए a मात्रक) के एक रेखा–खण्ड को दो दिशाओं में से किसी एक दिशा से निदेशित करें, तो हम एक दिष्ट रेखा–खण्ड पाते हैं। आकृति 21.1(c) में हम एक दिष्ट रेखा–खण्ड को AB द्वारा निदेशित किए हैं, जिसका परिमाण रेखा–खण्ड AB के लम्बाई द्वारा निरूपित है। दिष्ट रेखा खण्ड $\overrightarrow{AB}$ का A आदि–बिन्दु (Initial point) और B अन्त्य बिन्दु (End point) है।

आकृति 21.1

चूँकि दिष्ट रेखा–खण्ड में परिमाण और दिशा दोनों होते हैं, अतः वह एक सदिश निरूपित करता है।

आकृति 21.1 (c) द्वारा निरूपित सदिश AB को $\overrightarrow{AB}$ या $\vec{a}$ द्वारा निरूपित करते हैं। हाथ से लिखने और छपने में अदिश और सदिश में विभेद करने के लिए हम उस परिपाटी का प्रयोग करते हैं, जिसके अनुसार सदिशों को मोटे प्रिन्ट या उसको निरूपित करने वाले अक्षर के ऊपर प्रतीक $\rightarrow$ लगाया जाता है। अदिशों को सामान्य प्रिन्ट में बिना प्रतिक $\rightarrow$ के द्वारा व्यक्त करते हैं।

एक सदिश की लम्बाई या परिमाण को निरपेक्ष मान चिह्न $|\overrightarrow{AB}|$ (या $|\vec{a}|$ या a) द्वारा व्यक्त करते हैं। कथन $|\vec{a}| < 0$ असत्य है, क्योंकि लम्बाई कभी ऋणात्मक नही होती है।

स्वतन्त्र सदिश (Free Vectors) सदिशों को जैसा कि ऊपर परिभाषित किया गया है, स्वतन्त्र सदिश कहते हैं। क्योंकि किसी सदिश को बिना परिमाण और दिशा में परिवर्तन किए समान्तर विस्थापन द्वारा एक स्थान से दूसरे स्थान पर विस्थापित कर सकते हैं।

स्थानिक सदिश (Localized) या सर्पी सदिश (Sliding Vectors) यदि किसी स्वतंत्र सदिश का आदि बिन्दु निधार्रित है तो उसे स्थानिक या सर्पी सदिश कहते हैं। तात्पर्य यह है, कि स्वतंत्र सदिश का अन्तरिक्ष में कोई विशिष्ट स्थान नहीं होता है, जबकि एक स्थानिक सदिश को हम आकाश में विस्थापित नहीं कर सकते हैं।

टिप्पणी यान्त्रिकी (Mechanics) में जहाँ बल एक सदिश राशि के रूप में प्रयुक्त किया जाता है, यह आवश्यक है कि सदिश को केवल परिमाण और दिशा में ही नहीं बल्कि वह स्थान भी निर्धारित हो जिस पर यह कार्य करता है, क्योंकि दो समान्तर बल समान परिणाम के होने पर भी एक ही अक्ष के परितः घुमाने पर विभिन्न घूर्णन प्रदान कर सकते हैं। इसलिए बल सुनिश्चित आदि बिन्दु वाला सदिश है, अतः बल एक स्थानिक सदिश है।

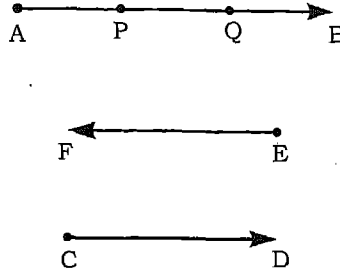
इकाई सदिश (Unit Vector) एक सदिश जिसका परिमाण एक इकाई है उसे इकाई सदिश कहते हैं। सदिश $\vec{a}$ की दिशा में इकाई सदिश प्राप्त करने के लिए हमें इसके परिमाण $|\vec{a}|$ से भाग देना पड़ता है।

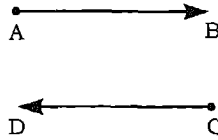
इस प्रकार सदिश $\vec{a}$ की दिशा में इकाई सदिश $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ है। इसे हम $\hat{a}$ द्वारा व्यक्त करते हैं।

शून्य सदिश (Zero Vector) शून्य परिमाण के सदिश को शून्य सदिश कहते हैं, और इसे $\vec{0}$ द्वारा व्यक्त करते हैं। इस सदिश की दिशा सुनिश्चित नहीं होती है, या विकल्पतः इसको कोई दिशा रखने वाला सदिश नहीं समझ सकते हैं। कोई बिन्दु (अपविकसित रेखा–खण्ड, degenerated line segment) शून्य सदिश निरूपित करता है। उदाहरणतः एक तल (या अन्तरिक्ष) में यदि बिन्दु A है, तो $\overrightarrow{AA}$ शून्य सदिश $\vec{0}$ को व्यक्त करता है।

टिप्पणी पाठक को अदिश 0 और शून्य सदिश $\vec{0}$ में विभेद करने तथा पहचानने की क्षमता होनी चाहिए। अदिश '0' एक वास्तविक संख्या है। जबकि सदिश $\vec{0}$ एक सदिश है, जिसका परिमाण शून्य है, परन्तु दिशा स्वेच्छ है। सदिश समीकरणों में हम $\vec{0}$ का ही प्रयोग करेंगे, आदिश 0 का नहीं।

संरेख सदिश (Collinear Vectors) दो या दो से अधिक, सदिश संरेख कहे जाते हैं, यदि उनकी दिशाएं समान्तर, अनुदिश अथवा प्रति दिश (like अथवा unlike) हों तथा उनका परिमाण कुछ भी हो। ध्यान दीजिए कि संरेख अदिशों को एक ही रेखा के अनुदिश होना आवश्यक नहीं

है। चूँकि शून्य सदिश की दिशा कुछ भी हो सकती है, अतः यह किसी भी सदिश के संरेख हो सकता है। आकृति 21.2 में $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{QP}$ और $\overrightarrow{EF}$ सभी संरेख सदिशों के उदाहरण हैं।

आकृति 21.2

एक सदिश का ऋण (Negative of a Vector) एक सदिश, जिसका परिमाण सदिश $\vec{a}$ के समान परन्तु दिशा $\vec{a}$ के विपरीत हो, उसे सदिश $\vec{a}$ का ऋण (Negative) कहते हैं, जिसे $-\vec{a}$ द्वारा व्यक्त करते हैं। ध्यान दीजिए कि किसी सदिश का ऋण उस सदिश के संरेख होता है।

आकृति 21.3

उपर्युक्त आकृति 21.3 में $\overrightarrow{BA}$, सदिश $\overrightarrow{AB}$ का ऋण है, अतः

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}.$$

पुनः यदि CD = AB, और AB और CD समान्तर हैं, जैसा कि आकृति 21.3 में प्रदर्शित हैं, तो

$$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}\cdot$$

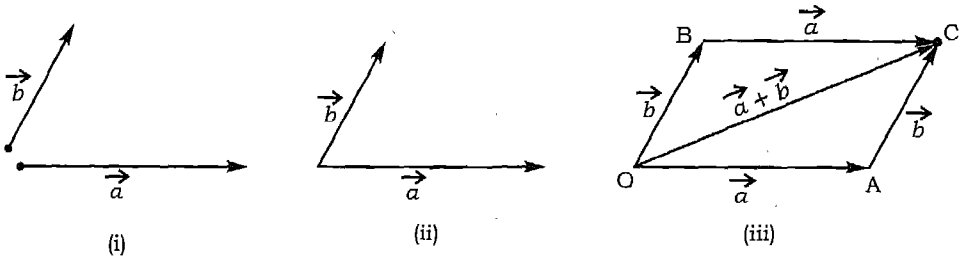
समान सदिश (Equal Vectors) दो सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ समान कहलाते हैं, कि यदि उनके परिमाण समान हों तथा दिशाएं भी समान हों, जबकि उनके आदि विन्दुओं कि स्थितियाँ भिन्न भी हो सकती हैं। $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ समान सदिशों को हम $\vec{a} = \vec{b}$ लिखते हैं।

ध्यान दीजिए कि आकृति 21.3 में $\overrightarrow{AB}$ और $\overrightarrow{DC}$ सदिश हैं। निश्चितः समान सदिश संरेख सदिश हैं, जिनके परिमाण तथा दिशाएं भी समान हैं।

21.3 सदिशों का योगफल (Addition of Vectors)

विचार कीजिए कि दो फुटबाल खिलाड़ी साथ ही साथ एक फुटबाल को विभिन्न दिशाओं में किक करते हैं। फलस्वरूप फुटबाल ऐसी दिशा में गति करता है जो दोनों खिलाड़ियों द्वारा किक की गयी दिशा से भिन्न होती है। इसका कारण यह है, कि दो बलों के परिणामी बल की दिशा दोनों बलों की दिशाओं से भिन्न होती है। एक नाविक, जो नाव से नदी को पार करना चाहता है, जैसे उदाहरण पर हम विचार करते हैं। यदि वह नाव को नदी के तट की लम्ब दिशा में खेता है, तो नदी के उस पार वह ठीक विपरीत सम्मुख बिन्दु पर नहीं पहुँचता है, बल्कि ऐसे बिन्दु पर पहुँचेगा, जो अनुप्रवाह (down stream) की दिशा में कुछ दूर हट कर होता है, क्योंकि नाव का भूमि के सापेक्ष वेग, नाव के धार के सापेक्ष वेग और जल–प्रवाह के वेग का परिणामी होता है। यह पृष्ठभूमि हमें दो असंरेख सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के योगफल को निम्नलिखित ढंग से परिभाषित करने में सहायक होती है।

यदि दो सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$, एक समान्तर चर्तुभुज की दो संलग्न भुजाओं द्वारा परिमाण दिशा में निरूपित हों, तो उनका योगफल $\vec{a}+\vec{b}$ परिमाण और दिशा में उनके उभयनिष्ठ शीर्ष से जाने वाले विकर्ण द्वारा निरूपित करते हैं, जो "समान्तर चर्तुभुज नियम" कहलाता है।

यह ध्यान देने योग्य है कि इस परिणाम की सहायता से हम दो असंरेख सदिशों का सदैव योगफल ज्ञात करते हैं। यदि उनके आदि बिन्दु एक ही नहीं हों तो उनमें से किसी एक को स्वयं समान्तरतः स्थानान्तरित करके तथा उसके परिमाण और दिशा को समान रखते हुए इस प्रकार लाते हैं कि, दोनों के आदि बिन्दु संपाती हो जायें।

आकृति 21.4

उपर्युक्त आकृति 21.4 में $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो असंरेख–सदिश हैं, जो क्रमशः $\overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{OB}$ द्वारा परिमाण और दिशा में निरूपित हैं। उनका योगफल $\vec{a}+\vec{b}$, समान्तर चर्तुभुज के विकर्ण $\overrightarrow{OC}$ द्वारा निरूपित होता है।

हम देखते हैं, कि $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC}$, इस प्रकार योगफल

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} = \vec{a}+\vec{b},$$

जो त्रिभुज OAC को तीसरी भुजा $\overrightarrow{OC}$ द्वारा निरूपित है जिसकी दिशा $\overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{AC}$ के क्रम में ली गयी त्रिभुज की तीसरी भुजा के विपरीत है। इस प्रकार हम निम्नलिखित नियम प्राप्त करते हैं।

यदि दो सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ त्रिभुज की क्रम में ली गयी दो भुजाओं द्वारा परिमाण और दिशा में निरूपित हो तो उनका योगफल $\vec{a}+\vec{b}$ विपरीत क्रम में ली गयी त्रिभुज की तीसरी भुजा द्वारा निरूपित होता है। इस परिणाम को सदिशों के योगफल का त्रिभुज–नियम कहते हैं।

टिप्पणी यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो संरेख सदिश हों तो उनका योगफल $\vec{a}+\vec{b}$, सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के संरेख एक सदिश है, जिसका परिमाण $|\vec{a}+\vec{b}|$ उन दो सदिशों के परिमाणों का योगफल होता है, यदि वे अनुदिश होते हैं। परन्तु यदि वे प्रतिदिश हैं, तो $|\vec{a}+\vec{b}|$ का परिमाण $|\vec{a}|-|\vec{b}|$ या $|\vec{b}|-|\vec{a}|$ होता है, जो क्रमशः $|\vec{a}|>|\vec{b}|$ या $|\vec{a}|<|\vec{b}|$ पर निर्भर करता है।

यदि $\vec{b}$ एक अशून्य सदिश है, तो $-\vec{b}$, सदिश $\vec{b}$ के समान लम्बाई तथा विपरीत दिशा वाला एक सदिश है। अब हम दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के घटाना $\vec{a}-\vec{b}$ को परिभाषित करते हैं।

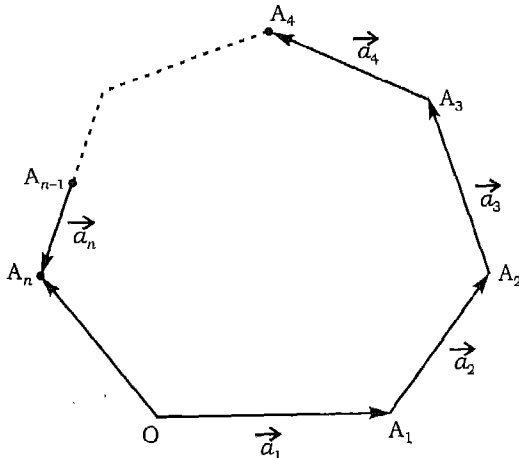
$$\vec{a}-\vec{b} = \vec{a}+(-\vec{b})$$

अतः $\vec{a}-\vec{b}$ वह सदिश हैं, जो यदि $\vec{b}$ में जोड़ा जाता हो, तो सदिश $\vec{a}$ प्राप्त होता है।

विशिष्टतः हम पाते हैं, कि

$$\vec{a}+(-\vec{a}) = \vec{0} = (-\vec{a})+\vec{a}.$$

21.3.1 *सदिशों के योगफल का बहुभुज नियम (Polygon law of addition of vectors)*

सदिशों के योगफल की प्रक्रिया को कई सदिशों तक प्रसारित कर सकते हैं, अतः n सदिशों

आकृति 21.5

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ का योगफल ज्ञात करने के लिए हम O को मूल–बिन्दु के रूप में चुनते हैं (आकृति 21.5)।

और $\overrightarrow{OA_1} = \vec{a}_1, \overrightarrow{A_1A_2} = \vec{a}_2, ..., \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \vec{a}_n$ खींचते हैं।

तब

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + ... + \vec{a}_n &= \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + ... + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} \\ &= \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + ... + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} \\ &= \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + ... + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} \\ &= ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ &= \overrightarrow{OA_n}. \end{aligned}$$

इस प्रकार अभीष्ट योगफल $\overrightarrow{OA_n}$ द्वारा निरूपित है। इस परिणाम को सदिशों के योगफल का बहुभुज नियम कहते हैं।

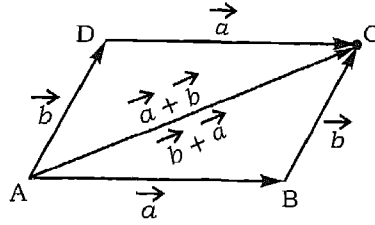
टिप्पणी: यदि तीन सदिश $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ और $\vec{a}_3$ त्रिभुज की क्रम से ली गयी तीन भुजाओं द्वारा निरूपित हो, तो $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \vec{0}$ हम इस परिणाम का व्यापकीकरण n सदिशों तक भी कर सकते हैं। जिसके अनुसार "यदि सदिश $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, ..., \vec{a}_n$ एक बहुभुज की क्रम में ली गयी n भुजाओं द्वारा निरूपित हों, तो $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + ... + \vec{a}_n = \vec{0}$".

21.3.2 *सदिशों के योगफल का क्रम–विनिमेय नियम (The commutative law for the addition of Vectors)*

प्रमेय 1 यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो सदिश हैं। तो,

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

अर्थात सदिश योगफल क्रम–विनिमेय है।

उपपत्ति समान्तर चतुर्भुज ABCD पर विचार कीजिए। मान लीजिए $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ और $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ (आकृति 21.6), तो त्रिभुज नियम के प्रयोग द्वारा त्रिभुज ABC से $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ चूँकि समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएं समान तथा समान्तर है, तब हम पाते हैं, कि $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \vec{b}$ और $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$ पुनः त्रिभुज ADC में त्रिभुज नियम के प्रयोग से हम पाते हैं कि,

आकृति 21.6

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{b} + \vec{a}.$$

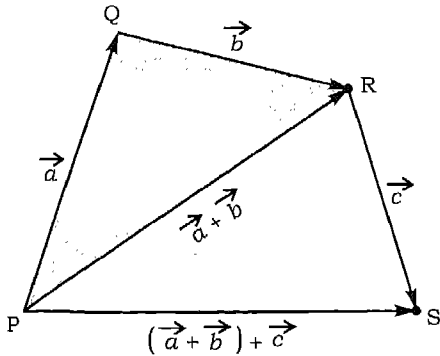
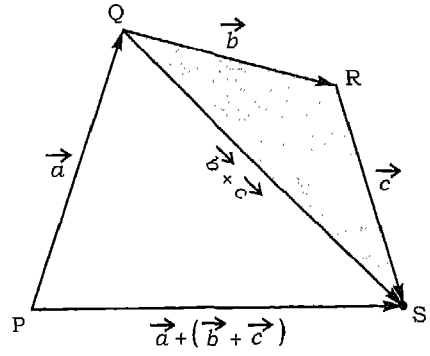
इस प्रकार $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$.

21.3.3 *सदिशों के योगफल के लिए साहचर्य नियम (The Associative law for the addition of vectors)* हम जानते हैं, कि तीन सदिशों के योगफल $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ का अर्थ $(\vec{a}+\vec{b})$ और $\vec{c}$ अथवा इसका अर्थ $\vec{a}$ और $(\vec{b}+\vec{c})$ का योगफल हो सकता है। जब तक ये दोनों सदिश योगफल समान नहीं होते हैं, तब तक $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ स्पष्टतः परिभाषित नहीं है। इसके लिए हम निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करते हैं,

प्रमेय 2 यदि $\vec{a}, \vec{b}$ और $\vec{c}$ कोई तीन सदिश हों, तो

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}.$$

अर्थात सदिश योगफल, साहचर्य नियम का पालन करता है।

उपपत्ति मान लीजिए कि $\vec{a}, \vec{b}$ और $\vec{c}$ तीनों सदिश क्रमशः $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{QR}$ और $\overrightarrow{RS}$ द्वारा निरूपित हैं, जैसा कि आकृति 21.7 (a) और (b) में प्रदर्शित है।

(a)

(b)

आकृति 21.7

तब $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{PR}$ आकृति 21.7 (a)

तब $\vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{QS}$ आकृति 21. 7 (b)

अब $\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RS} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \overrightarrow{PS}$ [आकृति 21. 7 (a)]

और $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{PS}$ [आकृति 21. 7 (b)]

अतः $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

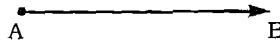
यह परिणाम तीन सदिशों $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ के योगफल को $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ के रूप में बिना कोष्ठकों के प्रयोग किए, लिखने के लिए सार्थक बनाता है।

21.3.4 *सदिश $\vec{0}$ सदिश योगफल के लिए तत्समक (Vector $\vec{0}$ is the identity for addition of vectors)*

प्रमेय 3 किसी सदिश $\vec{a}$ के लिए

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}.$$

अर्थात $\vec{0}$ सदिश योगफल के लिए तत्समक है।

उपपत्ति मान लीजिए कि सदिश $\vec{a}, \overrightarrow{AB}$ द्वारा निरूपित है और मान लीजिए कि $\vec{0}, \overrightarrow{BB}$ या $\overrightarrow{AA}$ (आकृति 21.8) द्वारा समतुल्यतः निरूपित है।

आकृति 21.8

तब $\vec{a} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$

और $\vec{0} + \vec{a} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$

इसलिए $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

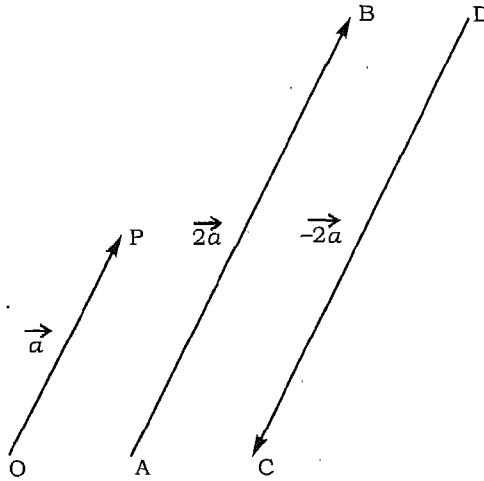
21.4 एक सदिश का एक अदिश द्वारा गुणन (Multiplication of a vector by a scalar)

मान लीजिए कि $\vec{a}$ एक सदिश और k एक अदिश है। सदिश $\vec{a}$ का अदिश k द्वारा गुणनफल $k\vec{a}$, एक सदिश है, जो सदिश $\vec{a}$ के संरेख तथा परिमाण में $\vec{a}$ के परिमाण का $|k|$ गुना है,

यदि $k>0$ जो $k\vec{a}$ की दिशा सदिश $\vec{a}$ के दिशा के समान होती है, और यदि $k<0$ तो $k\vec{a}$ की दिशा $\vec{a}$ के दिशा के विपरीत होती है।

$$\vec{b} = k\vec{a} \text{ का अर्थ है } |\vec{b}| = |k\vec{a}| = |k||\vec{a}|.$$

यदि $k=0$, तो $k\vec{a}$ का परिमाण शून्य है, अतः गुणनफल शून्य है (अर्थात $0\,\vec{a}=\vec{0}$).

यदि $k=-1$ तो $\vec{b}$, सदिश $\vec{a}$ का ऋण है और इस प्रकार $(-1)\,\vec{a}=-\vec{a}$ आकृति 21.9 में हम सदिश $\vec{a}$ के साथ ही साथ $2\vec{a}$ और $-2\vec{a}$ को निरूपित करते हैं।

आकृति 21.9

ध्यान दीजिए कि $\overline{OP}$ सदिश $\vec{a}$, $\overline{AB}$ सदिश $2\vec{a}$ और $\overline{DC}$ सदिश $-2\vec{a}$ को निरूपित करते हैं।

आप यह भी स्मरण कर सकते हैं, कि हम लोगों ने इस संकल्पना का उपयोग इकाई सदिश को परिभाषित करने में किया है, जहाँ हम $\hat{a}$ को $\vec{a}$ में $|\vec{a}|$ द्वारा भाग देकर प्राप्त करते हैं दूसरे शब्दों में $\vec{a}$ में $\frac{1}{|\vec{a}|}$ से गुणा करके $\hat{a}$ प्राप्त करते हैं। तथापि यदि हमें सदिश $\vec{0}$ दिया गया हो

$$k\vec{0} = \vec{0}, \quad \text{जहाँ } k \text{ एक अदिश है।}$$

हम उपर्युक्त परिणामों को, जो एक सदिश में एक अदिश द्वारा गुणन के सम्बन्ध में हैं,एक साथ निम्नलिखित रूप में लिखते हैं।

प्रमेय 4 किसी सदिश $\vec{a}$ और सदिश k के लिए

(i) $1\vec{a} = \vec{a}$

(ii) $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$

(iii) $0\vec{a} = \vec{0}$

और (iv) $k\vec{0} = \vec{0}$.

बंटन नियम (The distributive law)

प्रमेय 5 यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो सदिश और k और m दो अदिश हों, तो

(i) $k\vec{a} + m\vec{a} = (k+m)\vec{a}$

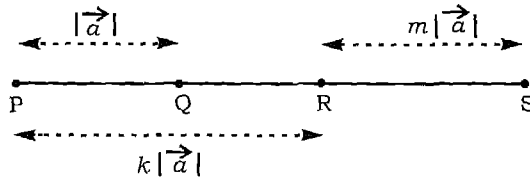
(ii) $k(m\vec{a}) = (km)\vec{a}$

(iii) $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.

उपपत्ति (i) मान लीजिए कि सदिश $\vec{a}$, $\overrightarrow{PQ}$ द्वारा निरूपित है, (आकृति 21.10)। मान लीजिए k और m धनात्मक हैं। PQ को बढ़ाइए और $k|\vec{a}| = |\overrightarrow{PR}|$ पर विचार कीजिए, ताकि $|\overrightarrow{PR}| = k|\overrightarrow{PQ}| = k|\vec{a}|$ है। $m\vec{a}$ पर विचार करने के लिए, हम बिन्दु R को आदि बिन्दु चयनित करते हैं। यदि $\overrightarrow{RS} = m\vec{a}$ हो तो

$$k\vec{a} + m\vec{a} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PS}.$$

अब

$$|\overrightarrow{PS}| = |\overrightarrow{PR}| + |\overrightarrow{RS}| = k|\vec{a}| + m|\vec{a}| = (k+m)|\vec{a}|.$$

आकृति 21.10

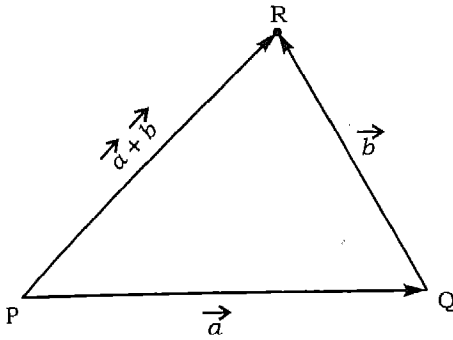
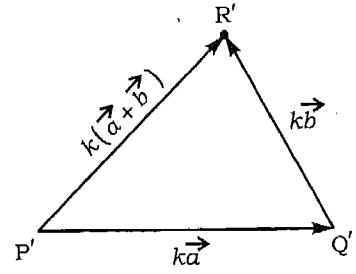
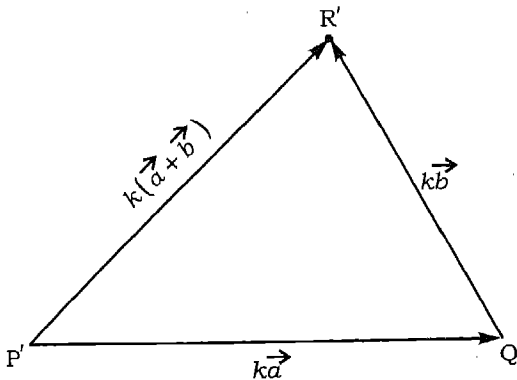
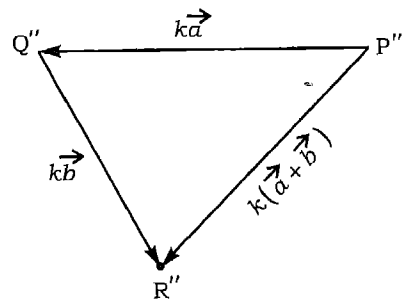
$\overrightarrow{PS}$ की दिशा वही है, जो सदिश $\vec{a}$ की है। इस प्रकार एक सदिश के अदिश गुणनफल की परिभाषा के अनुसार $\overrightarrow{PS} = (k+m)\vec{a}$. अतः

$$(k+m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}.$$

यह परिणाम सत्य है, जब k और m में कोई एक अथवा दोनों ऋणात्मक हैं, क्योंकि $-k\vec{a} = k(-\vec{a})$.

(ii) यह सिद्ध करना सरल है, और हम इसे पाठक के लिए अभ्यास हेतु छोड़ते हैं।

(iii) हम समरूप त्रिभुजों के गुणधर्म का प्रयोग करेंगे, जिसके अनुसार उनकी संगत भुजाएं समानुपाती होती हैं।

मान लीजिए कि k धनात्मक है। आकृति 21.11(a) के त्रिभुज PQR में सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के योगफल $\vec{a}+\vec{b}$ की रचना वर्णित है। त्रिभुज P′Q′R′, त्रिभुज PQR के समरूप है, (आकृति 21.11(b) और (c)) और उसकी प्रत्येक भुजा त्रिभुज PQR की संगत भुजा की k गुनी है, और उनके उसी दिशा में समान्तर भी हैं।

आकृति 21.11

इस प्रकार $\overrightarrow{P'Q'} = k\vec{a}$, $\overrightarrow{Q'R'} = k\vec{b}$ और $\overrightarrow{P'R'} = k(\vec{a}+\vec{b})$. परन्तु त्रिभुज P'Q'R' से हम यह भी पाते हैं, कि

$$\overrightarrow{P'R'} = \overrightarrow{P'Q'} + \overrightarrow{Q'R'} = k\vec{a} + k\vec{b}.$$

इसलिए

$$\overrightarrow{P'R'} = k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$$

जो k धनात्मक के लिए प्रमेय की उपपत्ति है।

यदि k ऋणात्मक है, तो हम त्रिभुज P''Q''R'' पर विचार करते हैं (आकृति 21.11(d))। यह त्रिभुज भी PQR के समरूप है, तथा इसकी प्रत्येक भुजा PQR के संगत भुजा की $-k$ गुनी है, और उनके समान्तर है परन्तु दिशा में विपरीत है। इस प्रकार परिणाम k ऋणात्मक के लिए सिद्ध होता है।

उदाहरण 1 यदि समषटभुज ABCDEF का केन्द्र O है, तो सदिशों का योगफल

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$$

ज्ञात कीजिए

हल ध्यान दीजिए कि समषटभुज का केन्द्र उसके सभी विकर्णों को समद्विभाजित करता है तथा वे सभी (विकर्ण) उससे होकर जाते हैं (आकृति 21.12)।

अतः

$$\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OD}, \quad \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OE}, \quad \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OF}$$

इससे प्राप्त होता है

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

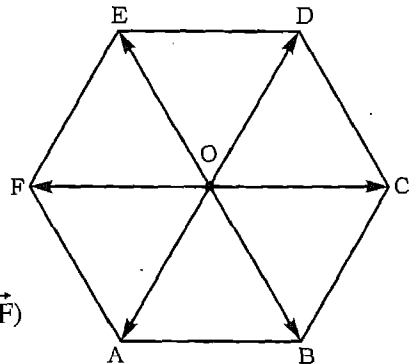
$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$$

अतः

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$$

$$= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OF})$$

$$= \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}.$$

आकृति 21.12

उदाहरण 2 सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य–बिन्दुओं के मिलाने पर प्राप्त रेखा–खण्ड, तीसरी भुजा के समान्तर और उसकी लम्बाई की आधी है।

हल मान लीजिए कि त्रिभुज ABC की भुजाओं AB और AC के मध्य बिन्दु क्रमशः D और E हैं (आकृति 21.13)। और मान लीजिए कि, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}$.

तब $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{a}$ और $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\vec{b}$.

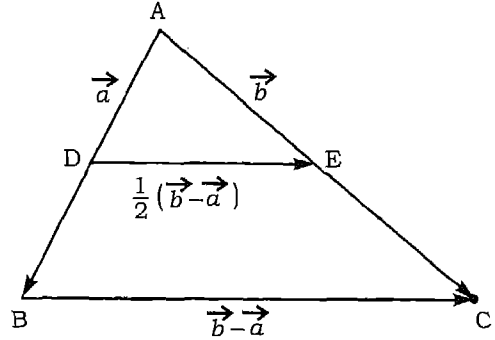
त्रिभुज ADE से

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$$

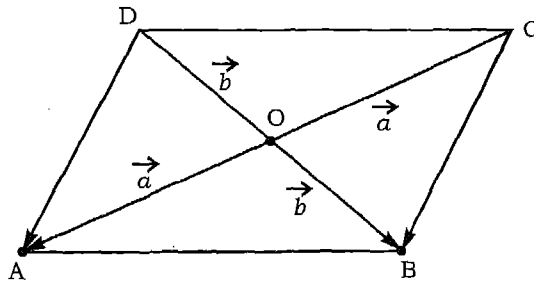
इस प्रकार $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$.

पुनः त्रिभुज ABC से

$$\overrightarrow{BC} = \vec{b} - \vec{a},$$

फलतः $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

आकृति 21.13

इस प्रकार DE समान्तर BC और $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

उदाहरण 3 दिखाइए कि एक चर्तुभुज के दोनों विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं, यदि और केवल यदि वह एक समान्तर चर्तुभुज है।

आकृति 21.14

हल मान लीजिए कि चर्तुभुज ABCD के विकर्णों AC और DB का प्रतिच्छेदन बिन्दु O है (आकृति 21.14)। यदि $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ और $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ तो AC और BD दोनों का मध्य–बिन्दु O है, यदि और केवल यदि $\overrightarrow{DO} = \vec{b}$ और $\overrightarrow{CO} = \vec{a}$ अर्थात यदि और केवल यदि $\overrightarrow{DA} = \vec{b} + \vec{a}$ और

$\overrightarrow{CB} = \vec{a} + \vec{b}$ अर्थात यदि और केवल यदि $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$ । हम यह भी जानते हैं कि एक चर्तुभुज समान्तर चतुर्भुज होता है, यदि और केवल यदि उसकी सम्मुख भुजाएं बराबर और समान्तर हों।

इस प्रकार परिणाम प्राप्त हुआ।

उदाहरण 4 दर्शाइए कि किसी चर्तुभुज की क्रमागत भुजाओं के मध्य–बिन्दुओं को मिलाने से समान्तर चर्तुभुज बनता है।

हल यदि P, Q, R और S चर्तुभुज ABCD की चारों भुजाओं के मध्य बिन्दु हैं (आकृति 21.15)। A और C को मिलाइए।

आकृति 21.15

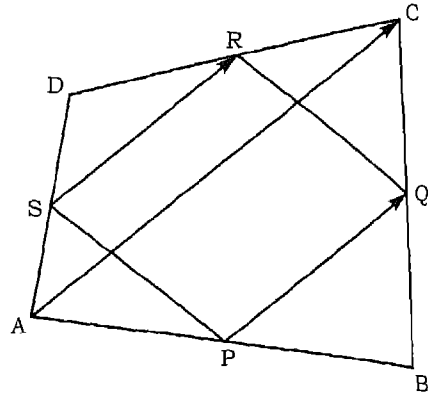
अब त्रिभुज ACD में,

$$\overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

क्योंकि त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा–खण्ड तीसरी भुजा के समान्तर तथा आधी होती है।

इसी प्रकार त्रिभुज ABC में

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

अतः $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$,

इस प्रकार PQRS एक समान्तर चर्तुभुज है।

उदाहरण 5 आकृति 21.16 में AB का मध्य बिन्दु M, CD का मध्य बिन्दु N, तथा MN का मध्य बिन्दु O है। सिद्ध कीजिए कि,

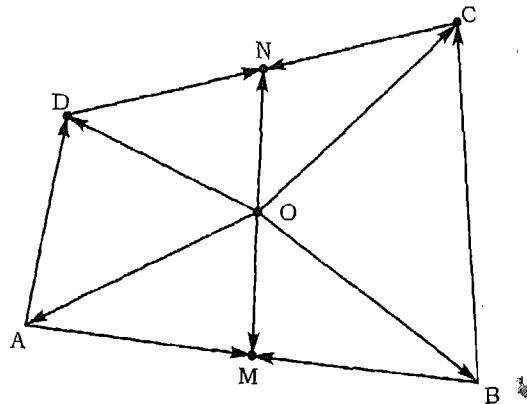
(i) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{O}$

(ii) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{MN}$.

आकृति 21.16

हल (i) आकृति 21.16 में

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OM}$$

अतः जोड़ने पर

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OM} \quad (1)$$

(ध्यान दें, $\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{BM}$).

इस प्रकार

$$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{ON} \quad (2)$$

(1) और (2) को जोड़ने पर

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON})=2.\vec{0}=\vec{0}.$$ (क्यों?)

(ii) पुनः आकृति 21.16 में

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC} \quad (3)$$

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ND} \quad (4)$$

(3) और (4) को जोड़ने पर हम पाते हैं कि

$$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{MN}\cdot$$

प्रश्नावली 21.1

1. यदि A, B और C तीन संरेख बिन्दु ऐसे हैं, कि $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ और $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. तो सदिश $\overrightarrow{AC}$ ज्ञात कीजिए।

2. $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो असंरेख सदिश हैं, जिनके आदि बिन्दु एक ही हैं। $\vec{a}+\vec{b}$ द्वारा कौन सा सदिश निरूपित है?

3. (i) यदि $\vec{a}=-\vec{b}$, क्या यह सत्य है, कि $|\vec{a}|=|\vec{b}|$?

   (ii) यदि $|\vec{a}|=|\vec{b}|$, क्या यह सत्य है, कि $\vec{a}=\pm\vec{b}$?

   (iii) यदि $|\vec{a}|=|\vec{b}|$, क्या यह सत्य है, कि $\vec{a}=\vec{b}$?

   (iv) $k\vec{a}=\vec{0}$, k और $\vec{a}$ के लिए क्या विकल्प प्रस्तुत करता है ?

4. यदि $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ और $\vec{d}$ चार अशून्य तथा विभिन्न सदिश, मूल बिन्दु O से क्रमशः चार विन्दुओं A, B, C और D को मिलाने वाले दिष्ट रेखा–खण्डों द्वारा निरूपित हैं, और यदि $\vec{b}-\vec{a}=\vec{c}-\vec{d}$ तो सिद्ध कीजिए कि ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

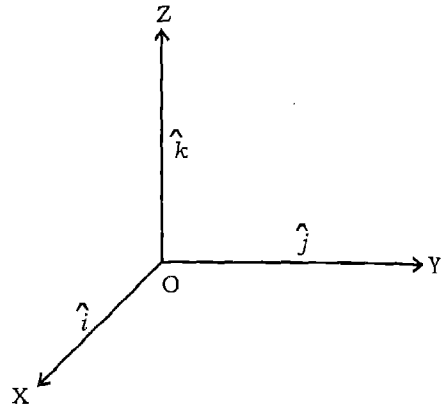
5. मूल बिन्दु से बिन्दुओं A, B और C को मिलाने वाले दिष्ट रेखा–खण्डों द्वारा निरूपित सदिश क्रमशः $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $4\vec{a}-3\vec{b}$ हैं। $\overrightarrow{AC}$ और $\overrightarrow{BC}$ ज्ञात कीजिए।

6. उस प्रतिबंध को बताइए, जिसके अन्तर्गत तीन सदिश $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ एक त्रिभुज की तीन भुजाएं बनाते हैं। अन्य सम्भावनाएं क्या है?

7. यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो सदिश, समषटभुज की दो संलग्न भुजाओं द्वारा निरूपित हों, तो उसी क्रम में ली गयी अन्य भुजाओं द्वारा निरूपित सदिशों को ज्ञात कीजिए।

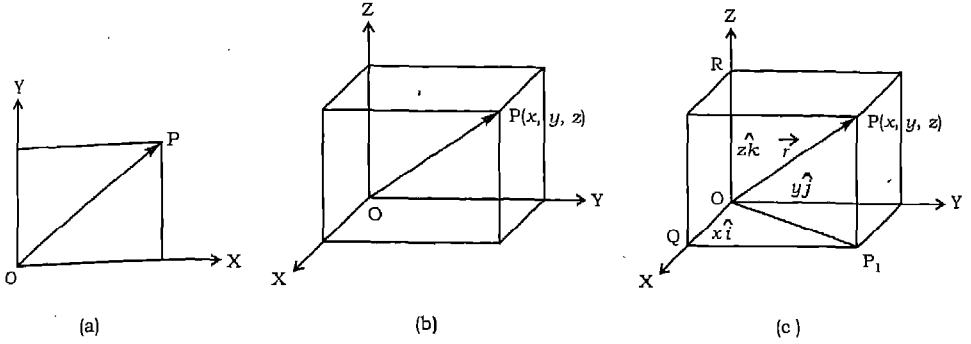
21.5 एक बिन्दु का स्थिति–सदिश (Position Vector of a Point)

x-अक्ष, y-अक्ष और z-अक्ष की धनात्मक दिशाओं में इकाई सदिश क्रमशः $\hat{i}$, $\hat{j}$ और $\hat{k}$, द्वारा व्यक्त किए जाते हैं (आकृति 21.17)। ये परस्पर लम्ब तीन इकाई सदिश $\hat{i}$, $\hat{j}$ और $\hat{k}$ सदिश बीजगणित और समकोणिक निर्देशांक ज्यामिति के बीच सह–सम्बन्ध स्थापित करने में अत्यन्त उपयोगी हैं।

यदि समकोणित अक्ष युग्म OX और OY के सापेक्ष तल में P कोई बिन्दु है, तो रेखा–खण्ड OP अर्थात $\overrightarrow{OP}$, बिन्दु P को अद्वितीयतः निधारित करता है, और इसे P का स्थिति–सदिश कहते हैं। {आकृति 21.18(a)}।

आकृति 21.17

अब हम इस संकल्पना का विस्तार त्रिविमीय अन्तरिक्ष के लिए करते हैं, तथा इसके लिए समकोणिक निर्देशांक OXYZ का चयन करते हैं। अन्तरिक्ष में एक बिन्दु P (x, y, z) पर विचार कीजिए {आकृति 21.18(b)}। $\overrightarrow{OP}$ एक सदिश है, जिसका आदि बिन्दु O और अन्त्य बिन्दु P है। बिन्दु P के निर्देशांक क्रमित–त्रिक (x, y, z) हैं।

x, y, z का समतुल्य वर्णन यह भी है, कि वे क्रमशः बिन्दु P से तलों YOZ, XOZ और XOY पर डाले गए लम्बों की लम्बाइयाँ हैं। यह स्पष्ट है, कि बिन्दु P क्रमित त्रिक (x, y, z) द्वारा निश्चित है, जो विलोमतः सत्य है। दिष्ट रेखा–खण्ड OP, जो बिन्दु P को अद्वितीयतः निधार्रित करता है, त्रिविमीय अन्तरिक्ष में P का स्थिति सदिश कहलाता है।

यह मानना सुविधाजनक है कि अक्षों OX, OY और OZ इस अर्थ में दाहिने हाथ के निकाय हैं, क्योंकि तल में OX से OY की ओंर घुमाने पर, या OY से OZ की ओर घुमाने या OZ से OX की ओर घुमाने की दिशा घड़ी की सूई की विपरीत दिशा में क्रमशः OX, OY, OZ,

आकृति 21.18

के सापेक्ष होती है, जैसा कि आकृति 21.18(c) में दर्शाया गया है। मान लीजिए P से तल XOY पर डाले गए लम्ब का पाद P_1 है {आकृति 21.18(c)}। इस प्रकार हम देखते हैं कि P_1P z-अक्ष के समान्तर है। चूंकि $\hat{i}$, $\hat{j}$ और $\hat{k}$ अक्षों x, y, z के अनु क्रमशः इकाई सदिश हैं, तथा बिन्दु P की निर्देशाक्षों के परिभाषा के अनुसार $\overrightarrow{P_1P} = z\hat{k}$. इसी प्रकार $\overrightarrow{QP_1} = y\hat{j}$ और $\overrightarrow{OQ} = x\hat{i}$ हैं अतः

$$\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP_1} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

और $$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}.$$

इस प्रकार बिन्दु O से बिन्दु $P(x, y, z)$ को मिलाने वाला सदिश प्राप्त होता है,

$$\overrightarrow{OP} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}.$$

यह बिन्दु $P(x, y, z)$ का स्थिति सदिश है और इसे $P(\vec{r})$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

सदिश $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ की लम्बाई शीघ्रता से दो बार पैथागोरस प्रमेय के प्रयोग से ज्ञात की जा सकती है। समकोण त्रिभुज OQP_1 (आकृति 21.18(c)) में हम देखते हैं कि

$$|\overrightarrow{OP_1}| = \sqrt{|\overrightarrow{OQ}|^2 + |\overrightarrow{QP_1}|^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

और समकोण त्रिभुज OP_1P में

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{|\overrightarrow{OP_1}|^2 + |\overrightarrow{P_1P}|^2} = \sqrt{(x^2 + y^2) + z^2}$$

इस प्रकार किसी सदिश $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ की लम्बाई निम्नलिखित है।

$$|\vec{r}| = |x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

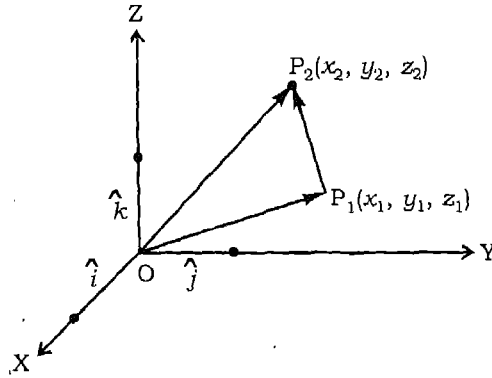
सदिशों $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$; के लिए

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\hat{i} + (a_2 + b_2)\hat{j} + (a_3 + b_3)\hat{k}$$

और $\qquad \lambda\vec{a} = \lambda a_1\hat{i} + \lambda a_2\hat{j} + \lambda a_3\hat{k}.$

अग्रतः यदि $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k} = \vec{0}$,

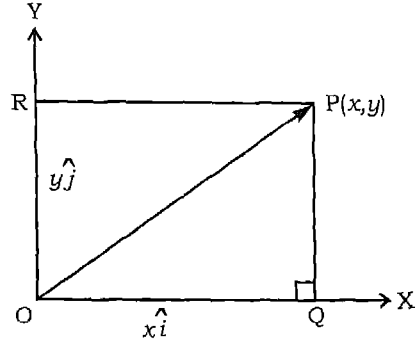
तब $\qquad a_1 = a_2 = a_3 = 0.$

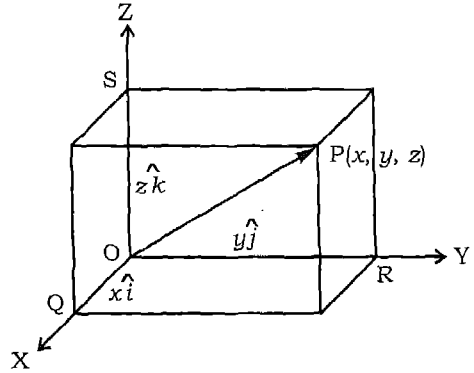
21.5.1 *दो बिन्दुओं के मिलाने से बना सदिश (Vector joining two points)* यदि $P_1(x_1, y_1, z_1)$ और $P_2(x_2, y_2, z_2)$ अन्तरिक्ष में दो बिन्दु हैं (आकृति 21.19), तो P_1 से P_2 तक का सदिश $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_1O} + \overrightarrow{OP_2}$. चूँकि $\overrightarrow{P_1O} = -\overrightarrow{OP_1}$, अतः हम लिख सकते हैं, कि

आकृति 21.19

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = (x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k})$$
$$= (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

इस प्रकार दो बिन्दुओं $P_1(x_1, y_1, z_1)$ और $P_2(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने से बने सदिश की लम्बाई

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

21.5.2 *एक सदिश के घटक* (*Components of a vector*) यदि समकोणिक निर्देशाक्षों OX और OY के सापेक्ष तल में P(x, y) एक बिन्दु है, (आकृति 21.20), तो $\overrightarrow{OP} = x\hat{i} + y\hat{j}$. सदिशों $x\hat{i}$ और $y\hat{j}$ जो क्रमशः $\overrightarrow{OQ}$ और $\overrightarrow{OR}$ द्वारा निरूपित है, को सदिश $\overrightarrow{OP}$ के OX और OY के अनु घटक सदिश कहते हैं।

आकृति 21.20

इसी प्रकार यदि P(x, y, z) त्रि–विमीय आकाश में कोई बिन्दु है, तो $\overrightarrow{OP} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ (आकृति 21.21). सदिशों $x\hat{i}$, $y\hat{j}$ और $z\hat{k}$, जो $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ और $\overrightarrow{OS}$, क्रमशः द्वारा निरूपित हैं, को सदिश $\overrightarrow{OP}$ का OX, OY और OZ के अनु सदिश घटक हैं। साथ ही x, y और z सदिश $\overrightarrow{OP}$ के क्रमशः OX, OY और OZ के अनु अदिश घटक हैं।

आकृति 21.21

उदाहरण 6 वह सदिश ज्ञात कीजिए, जिसका आदि बिन्दु P(–4, 2) और अन्त बिन्दु Q(0, –4) है।

हल P और Q के मिलाने से प्राप्त सदिश निम्नांकित है।

$$\overrightarrow{PQ} = (0+4)\hat{i} + (-4-2)\hat{j}$$
$$= 4\hat{i} - 6\hat{j}.$$

उदाहरण 7 बिन्दु P(3, 2) से बिन्दु Q(5, 6) की दिशा में इकाई सदिश ज्ञात कीजिए।

हल $\overrightarrow{PQ} = (5-3)\hat{i} + (6-2)\hat{j} = 2\hat{i} + 4\hat{j}$.

$\overrightarrow{PQ}$ की दिशा में इकाई सदिश निम्नांकित है।

$$\frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|} = \frac{2\hat{i} + 4\hat{j}}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{5}} + \frac{2\hat{j}}{\sqrt{5}}.$$

उदाहरण 8 सदिश $-\hat{i}+2\hat{j}$ की दिशा में 5 परिमाण वाले सदिश को ज्ञात कीजिए।

हल हम सदिश $\vec{a}=-\hat{i}+2\hat{j}$ की दिशा में एक सदिश चाहते हैं। अभीष्ट सदिश निम्नलिखित है।

$$5\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=5\left(\frac{-\hat{i}+2\hat{j}}{\sqrt{1+4}}\right)=5\left(\frac{-\hat{i}}{\sqrt{5}}+\frac{2\hat{j}}{\sqrt{5}}\right)=\sqrt{5}(-\hat{i}+2\hat{j}).$$

उदाहरण 9 दो बिन्दुओं $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ को मिलाने वाले सदिश को ज्ञात कीजिए, तथा इसके घटकों को भी ज्ञात कीजिए।

हल ध्यान दीजिए

$$\overrightarrow{OP}=x_1\hat{i}+y_1\hat{j} \text{ और } \overrightarrow{OQ}=x_2\hat{i}+y_2\hat{j}, \text{ जहाँ O मूल–बिन्दु है।}$$

परन्तु $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}$. इसलिए

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$$

$$=(x_2\hat{i}+y_2\hat{j})-(x_1\hat{i}+y_1\hat{j})$$

$$=(x_2-x_1)\hat{i}+(y_2-y_1)\hat{j}.$$

अबः $\overrightarrow{PQ}$ के x–अक्ष और y–अक्ष के दिशा में घटक $(x_2-x_1)\ \hat{i}$ और $(y_2-y_1)\ \hat{j}$, क्रमशः हैं।

उदाहरण 10 यदि $\vec{u}=u_1\hat{i}+u_2\hat{j}$ और $\vec{v}=v_1\hat{i}+v_2\hat{j}$ अशून्य सदिश हैं, तो सिद्ध कीजिए कि वे समान्तर होंगे, यदि और केवल यदि $u_1v_2-u_2v_1=0$ ।

हल स्मरण कीजिए कि $\vec{u}$, $\vec{v}$ के समान्तर है, यदि और केवल यदि एक अशून्य अदिश k का ऐसा अस्तित्व हो ताकि $\vec{u}=k\vec{v}$, अर्थात यदि और केवल यदि

$$u_1\hat{i}+u_2\hat{j}=k(v_1\hat{i}+v_2\hat{j}),$$

या $$(u_1-kv_1)\hat{i}+(u_2-kv_2)\hat{j}=\vec{0},$$

जिससे प्राप्त होता है, $u_1-kv_1=0=u_2-kv_2$,

या $$k=\frac{u_1}{v_1}=\frac{u_2}{v_2}.$$

अतः $\vec{u}$ और $\vec{v}$ समान्तर हैं, यदि और केवल यदि $u_1v_2-u_2v_1=0$.

उदाहरण 11 सदिशों $\vec{a}=2\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}$ और $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ के योगफल के सामान्तर इकाई सदिश ज्ञात कीजिए।

हल दिए सदिशों का योगफल निम्नांकित है।

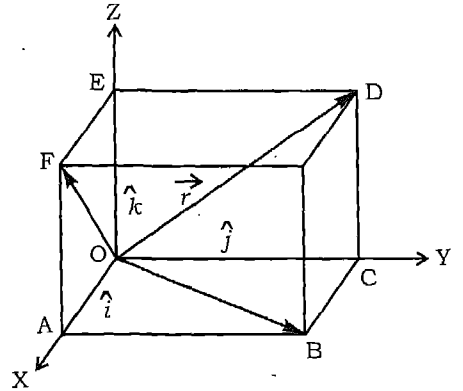
$$\vec{r}=\vec{a}+\vec{b}=(2\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k})+(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})=3\hat{i}+6\hat{j}-2\hat{k}$$

और $$|\vec{r}|=|3\hat{i}+6\hat{j}-2\hat{k}|=\sqrt{3^2+6^2+(-2)^2}=7.$$

अतः $\vec{r}$ के समान्तर इकाई निम्नांकित है,

$$\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}=\frac{3}{7}\hat{i}+\frac{6}{7}\hat{j}-\frac{2}{7}\hat{k}.$$

उदाहरण 12 तीन सदिशों के परिमाण $a, 2a$ और $3a$ हैं, और वे सभी एक बिन्दु पर मिलते हैं। उनकी दिशाएं क्रमशः एक घन के तीन संलग्न फलकों के विकर्णों की दिशा में है। उनके परिणामों का परिमाण ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}$ और $\overrightarrow{OF}$ घन के तीन संलग्न फलकों क्रमशः OABC, OCDE और OEFA के विकर्ण हैं (आकृति 21.22)। मान लीजिए कि $\hat{i}$, $\hat{j}$ और $\hat{k}$ OA, OC, OE के अनु क्रमशः इकाई सदिश हैं। मान लीजिए कि घन की एक भुजा की लम्बाई b है। इस प्रकार

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=b(\hat{i}+\hat{j})$$

आकृति 21.22

अतः $|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{2}\,b.$

इसी प्रकार $\overrightarrow{OB}$ के अनु इकाई सदिश $\overrightarrow{OB}=\frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}=\frac{\hat{i}+\hat{j}}{\sqrt{2}}.$

और $\overrightarrow{OD}$ के अनु इकाई सदिश $\overrightarrow{OD}=\frac{\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{2}}$

$\overrightarrow{OF}$ के अनु इकाई सदिश $\overrightarrow{OF}=\frac{\hat{k}+\hat{i}}{\sqrt{2}}.$

इसलिए $\overrightarrow{OB} = \frac{a(\hat{i}+\hat{j})}{\sqrt{2}}$, $\overrightarrow{OD} = \frac{2a(\hat{j}+\hat{k})}{\sqrt{2}}$ और $\overrightarrow{OF} = \frac{3a(\hat{k}+\hat{i})}{\sqrt{2}}$.

इस प्रकार सदिशों $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OD}$ और $\overrightarrow{OF}$ का परिमाण $\vec{R}$ निम्नांकित है।

$$\vec{R} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF} = \frac{a(\hat{i}+\hat{j})+2a(\hat{j}+\hat{k})+3a(\hat{k}+\hat{i})}{\sqrt{2}}$$

$$= \left(\frac{4a}{\sqrt{2}}\right)\hat{i} + \left(\frac{3a}{\sqrt{2}}\right)\hat{j} + \left(\frac{5a}{\sqrt{2}}\right)\hat{k}.$$

परिणामी का परिमाण निम्नांकित है।

$$|\vec{R}| = \sqrt{\left(\frac{4a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{3a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{5a}{\sqrt{2}}\right)^2} = 5a.$$

प्रश्नावली 21.2

1. यदि $|\vec{a}| = 3$ और $-4 \le k \le 1$, तो $|k\vec{a}|$ के विषय में आप क्या कह सकते है?
2. $|\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}|$ का मान ज्ञात कीजिए।
3. सदिश $\vec{a} = 2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}$ की दिशा में इकाई सदिश ज्ञात कीजिए।
4. यदि $P_1 = (2, 4, 7)$ और $P_2 = (-4, -1, 5)$, तो $\overrightarrow{P_1P_2}$ और $|\overrightarrow{P_1P_2}|$ ज्ञात कीजिए।
5. उस सदिश को ज्ञात कीजिए जिसका आदि बिन्दु P(6,–2) और अंत्य बिन्दु Q(4,8) है।
6. सदिश $-\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$ की दिशा में वह सदिश ज्ञात कीजिए, जिसका परिमाण 7 है।
7. बिन्दु P(1, 2) से Q(4, 5) की ओर वाले सदिश की दिशा में इकाई सदिश ज्ञात कीजिए।
8. बिन्दु P(1, 2, 3) से बिन्दु Q(4, 5, 6) की दिशा में व्यक्त सदिश की दिशा में इकाई सदिश ज्ञात कीजिए।
9. वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए, जिसके अन्तर्गत सदिश $\vec{a} = k\hat{i}+3\hat{j}$ और $\vec{b} = 4\hat{i}+k\hat{j}$, $(k \ne 0)$ समान्तर हैं।
10. वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए, ताकि सदिश $\vec{a} = k\hat{i}+l\hat{j}$ और $\vec{b} = l\hat{i}+k\hat{j}$, $(k, l \ne 0)$ समान्तर हों।

21.6 एक रेखा–खण्ड का दिए अनुपात में विभाजन (वर्ग विभाजन सूत्र) [Dividing a Line Segment in a Given Ratio (Section Formula)]

मान लीजिए कि P और Q दो बिन्दु है, जिनके स्थिति सदिश मूल बिन्दु O के सापेक्ष क्रमशः $\overrightarrow{OP}$ और $\overrightarrow{OQ}$ हैं। मान लीजिए कि R वह बिन्दु है, जो $\overrightarrow{PQ}$ को इस प्रकार विभक्त करता है, कि $\lambda\overrightarrow{QR} = \mu\overrightarrow{RP}$, जहाँ λ और μ धनात्मक अदिश हैं (आकृति 21.23)। इस स्थिति में हम कहते हैं, कि बिन्दु R सदिश $\overrightarrow{PQ}$ को अन्ततः λ : μ के अनुपात में बाँटता है। अतः हम पाते हैं कि

$$\frac{PR}{RQ} = \frac{\lambda}{\mu},$$

जिससे हम पाते हैं कि $PR = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} PQ.$

इस प्रकार $\overrightarrow{PR} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\overrightarrow{PQ}.$

आकृति 21.23

यदि सदिशों $\overrightarrow{OP}$ और $\overrightarrow{OQ}$ को क्रमशः $\vec{a}$ और $\vec{b}$ द्वारा निरूपित किया जाय, तो

$$\overrightarrow{PR} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}(\vec{b} - \vec{a}).$$

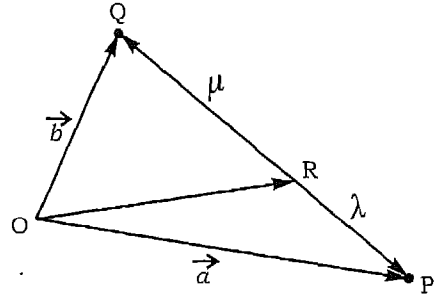
इसलिए त्रिभुज OPR से हम पाते हैं, कि

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR}$$

$$= \vec{a} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}(\vec{b} - \vec{a}).$$

$$= \vec{a} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}(\vec{b} - \vec{a})$$

$$= \frac{(\lambda+\mu)\vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})}{\lambda+\mu}$$

$$= \frac{\mu\,\vec{a} + \lambda\,\vec{b}}{\lambda+\mu}.$$

अतः बिन्दु R जो P और Q को अन्ततः $\lambda : \mu$ के अनुपात में बाँटता है, का स्थिति सदिश निम्नलिखित है,

$$\overrightarrow{OR} = \frac{\lambda \vec{b} + \mu \vec{a}}{\lambda + \mu}.$$

विशिष्ट स्थिति के रूप में रेखा–खण्ड PQ के मध्य–बिन्दु का स्थिति सदिश उपर्युक्त परिणाम में $\lambda = \mu = 1$ रखकर प्राप्त किया जा सकता है। इस प्रकार PQ के मध्य–बिन्दु का स्थिति सदिश $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ है।

यह पाठकों द्वारा सत्यापन के लिए छोड़ दिया जाता है कि बिन्दु R, जो रेखा–खण्ड को बाह्यत $\lambda : \mu$ के अनुपात में बाँटता है, का सदिश निम्नलिखित है।

$$\frac{\lambda\vec{b} - \mu\vec{a}}{\lambda - \mu}.$$

उदाहरण 13 बिन्दु R का स्थिति–सदिश ज्ञात कीजिए, जो बिन्दुओं $P(3\vec{a} - 2\vec{b})$ और $Q(\vec{a}+\vec{b})$ को मिलाने वाली रेखा–खण्ड को 2 : 1 में (i) अन्ततः और (ii) बाह्यतः बाँटता है।

हल (i) P और Q को मिलाने वाली रेखा–खण्ड को अन्ततः 2:1 के अनुपात में बाँटने वाले बिन्दु R की अभीष्ट स्थिति सदिश

$$\frac{2(\vec{a}+\vec{b})+(3\vec{a}-2\vec{b})}{3}, \text{ अर्थात}, \frac{5\vec{a}}{3} \text{ है।}$$

(ii) अनुपात में बाह्यतः विभक्त करने वाले बिन्दु का

स्थिति सदिश $\dfrac{2.(\vec{a}+\vec{b})-1.(3\vec{a}-2\vec{b})}{2-1}$, अर्थात, $4\vec{b}-\vec{a}$ है।

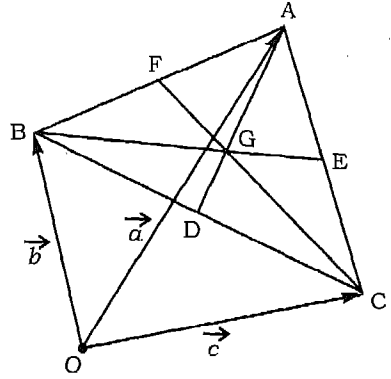
उदाहरण 14 सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज की माध्यिकाएं संगामी होती हैं, तथा संगमन बिन्दु प्रत्येक माध्यिका को 2 : 1 के अनुपात में बाँटता है।

हल मान लीजिए कि बिन्दुओं A, B और C के स्थिति–सदिश मूल–बिन्दु O (कोई) के सापेक्ष $\vec{a}, \vec{b}$ और $\vec{c}$ हैं (आकृति 21.24)। मान लीजिए कि तीनों भुजाओं के मध्य बिन्दु आकृति के अनुसार D, E और F हैं। अतः D का स्थिति सदिश $\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$ हैं।

बिन्दु G, जो AD को 2 : 1 के अनुपात में बाँटता है, का स्थिति सदिश

$$\frac{1\cdot\vec{a}+2\cdot\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}}{2+1},\ \text{अर्थात},\ \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\ \text{है}$$

इसी प्रकार हम देख सकते हैं, कि माध्यिकाओं BE और CF को 2 : 1 के अनुपात में बाँटने वाले बिन्दुओं का स्थिति सदिश

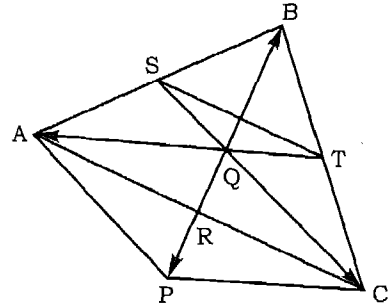
$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$, ही प्राप्त होता है।

आकृति 21.24

इस प्रकार ये सभी बिन्दु G के संपाती हैं। इस प्रकार अभीष्ट सिद्ध होता है।

बिन्दु G को त्रिभुज ABC का केन्द्रक कहते हैं।

उदाहरण 15 यदि त्रिभुज ABC की माध्यिकाओं का प्रतिच्छेदन बिन्दु Q है, तो सिद्ध कीजिए कि, $\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QC}=\vec{0}$.

हल त्रिभुज ABC की माध्यिकाएं BR, CS और AT बिन्दु Q पर प्रतिच्छेदित करती हैं। बिन्दु Q प्रत्येक माध्यिका को 2 : 1 में विभाजित करता है (आकृति 21.25)। समान्तर चर्तुभुज AQCP बनाइए। तब PR = RQ = $\frac{1}{2}QP$ = $\frac{1}{2}BQ$. इस प्रकार $\overrightarrow{QB}=-\overrightarrow{QP}$ । चूँकि $\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{QP}$, इसलिए हम पाते हैं, कि

$\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{QB}=\overrightarrow{QP}+(-\overrightarrow{QP})=\vec{0}$.

आकृति 21.25

प्रश्नावली 21.3

1. बिन्दुओं $P(2\vec{a}+\vec{b})$ और $Q(\vec{a}-3\vec{b})$ को मिलाने वाली रेखा–खण्ड को 1 : 2 के अनुपात में बाँटने वाले बिन्दु R का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए। यह भी दिखाइए कि P, रेखा–खण्ड RQ का मध्य–बिन्दु है।

2. यदि त्रिभुज ABC का केन्द्रक G है, तो सिद्ध कीजिए कि,

   $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

3. दिखाइए कि किसी चर्तुभुज की सम्मुख भुजाओं के मध्य–बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा–खण्ड परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

4. यदि त्रिभुज ABC के भुजाओं के मध्य–बिन्दु D, E और F हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF},$$

जहाँ O एक कोई स्वेच्छ बिन्दु है।

5. एक बिन्दु P, रेखा–खण्ड AB को $\lambda : 1$ के अनुपात में बाँटता है। λ के ऐसे मान ज्ञात कीजिए, जिनके लिए,

(a) P बिन्दु AB के बीच कहीं स्थित हो, और
  (i) B के अपेक्षा A के निकट हो
  (ii) A के अपेक्षा B के निकट हो

(b) P, AB के बाहर स्थित है, तथा
  (i) B के अपेक्षा A के निकट है
  (ii) A के अपेक्षा B के निकट है

6. बिन्दुओं A(4, 2), B(1, –2) और C(–2, 6) से बने त्रिभुज की माध्यिकाओं की लम्बाई सदिश–विधि से ज्ञात कीजिए।

7. दशाईए A(2, 6, 3), B(1, 2, 7) और C(3, 10, –1) तीनों बिन्दु संरेख हैं।

8. दशाईए कि सदिश $\vec{a}=3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$, $\vec{b}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ और $\vec{c}=\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$ एक समकोण त्रिभुज की भुजाएं हैं।

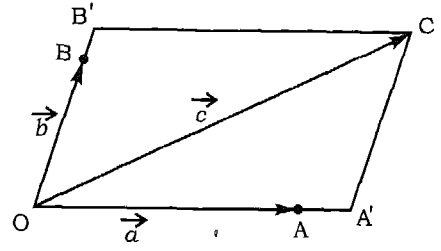
21.7 सदिशों के रैखिक संयोग (Linear Combination of Vectors)

हम पढ़ चुके हैं, कि दो सदिश संरेख (समान्तर) होते हैं, यदि उनकी दिशाएं समान अथवा विपरीत हैं, उनके परिमाण कुछ भी हो सकते हैं। इसलिए यदि $\vec{b}$, एक सदिश $\vec{a}$ के संरेख है, तो एक अदिश α का अस्तित्व अवश्य इस प्रकार का होता है, कि

$$\vec{b}=\alpha\,\vec{a}. \tag{1}$$

दूसरे शब्दों में $\vec{b}$, सदिश $\vec{a}$ का अदिश गुणज (Multiple) है। समानतः $\vec{a}$ को कहा जा सकता है, कि $\vec{a}$, सदिश $\vec{b}$ का अदिश गुणज है।

अब हम देखते हैं कि कैसे एक सदिश $\vec{c}$, जो दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के समतलीय (Coplanar) है, को $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के रैखिक संयोग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। मान लीजिए कि दो असंरेख सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के समतलीय $\vec{c}$ एक सदिश है।

यदि सदिशों $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ के प्रारम्भिक बिन्दु विभिन्न हैं, तो हम सदिशों को स्थानान्तरित करके उनके प्रारम्भिक बिन्दुओं को O पर लाते हैं (आकृति 21.26)। OC को विकर्ण रखने वाले समान्तर चर्तुभुज OA′CB′ को पूरा कीजिए। इस प्रकार हम पाते हैं, कि

आकृति 21.26

$$\overrightarrow{OA'} = \alpha\,\vec{a}, \text{ जहाँ } \alpha \text{ एक अदिश है।}$$

और $$\overrightarrow{OB'} = \beta\,\vec{b}, \text{जहाँ } \beta \text{ एक अदिश है।}$$

चूँकि $\overrightarrow{OA'}$ और $\overrightarrow{OB'}$ क्रमशः $\overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{OB}$, के संरेख हैं। अतः अब

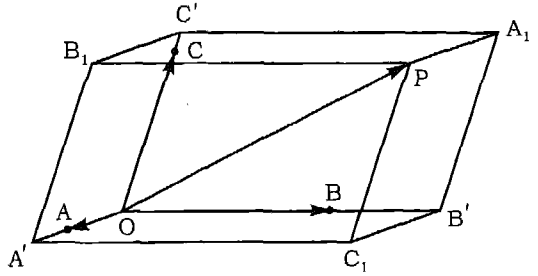
$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'},$$

इस प्रकार $$\vec{c} = \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b}. \tag{2}$$

सदिश $\vec{c}$ को सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ का रैखिक संयोग कहते हैं।

उपर्युक्त परिणाम को अन्तरिक्ष में सदिशों के लिए निम्नांकित की भाँति प्रसारित कर सकते हैं।

आकृति 21.27

अन्तरिक्ष में स्थित किसी सदिश को तीन असमतलीय (Non-coplaner) सदिशों के रैखिक संयोग के रूप में प्रकट कर सकते हैं। मान लीजिए कि $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ तीन असमतलीय सदिश हैं। और मान लीजिए कि $\vec{r}$ अन्तरिक्ष में कोई अन्य सदिश है। बिना व्यापकता को हानि पहुँचाए, सदिशों $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ और $\vec{r}$ के प्रारम्भिक बिन्दुओं को बिन्दु O पर मान सकते हैं। मान लीजिए कि ये क्रमशः $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ और $\overrightarrow{OP}$ द्वारा व्यक्त होते हैं। $\overrightarrow{OP}$ को विकर्ण रखने वाले समान्तर पट फलकों (parallelopiped) $OA'C_1B'\,A_1C'\,B_1P$ (आकृति 21.27) को पूरा कीजिए। मान लीजिए कि $\overrightarrow{OA'} = \alpha\,\vec{a}$, $\overrightarrow{OB'} = \beta\,\vec{b}$ और $\overrightarrow{OC'} = \lambda\,\vec{c}$.

अब $$\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = \alpha\,\vec{a} + \beta\vec{b}$$

और $\qquad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{C_1P} = \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OC'}$,

अतः प्राप्त होता है, कि $\vec{r} = (\alpha\,\vec{a} + \beta\vec{b}) + \gamma\vec{c}$

अर्थात $\qquad \vec{r} = \alpha\,\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$. $\qquad$ (3)

इस प्रकार सदिश $\vec{r}$, सदिशों $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ का एकरैखिक संयोग है। परिणाम (2) में सदिश $\vec{c}$ का $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के अनु घटक क्रमशः $\alpha\vec{a}$, $\beta\vec{b}$ हैं। और (3) में $\vec{r}$ के $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ के अनुघटक क्रमशः $\alpha\vec{a}$, $\beta\vec{b}$ और $\lambda\vec{c}$ हैं।

ध्यान दीजिए कि एक सदिश, जो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के समतलीय नहीं है, को $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के रैखिक संयोग के रूप में नहीं व्यक्त कर सकते हैं।

उदाहरण 16 सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ असंरेख हैं। x के किस मान के लिए सदिश $\vec{c} = (x-2)\vec{a} + \vec{b}$ और $\vec{d} = (3+2x)\vec{a} - 2\vec{b}$ संरेख हैं ?

हल संरेखता की परिभाषा के अनुसार सदिश $\vec{c}$ और $\vec{d}$ संरेख हैं, यदि और केवल यदि, एक संख्या इस प्रकार है, कि $\vec{d} = \lambda\vec{c}$, अर्थात,

$$(3+2x)\vec{a} - 2\vec{b} = \lambda[(x-2)\vec{a} + \vec{b}].$$

चूँकि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ असंरेख है, अतः समता (Equality)

$$[(3+2x) - \lambda(x-2)]\vec{a} - (2+\lambda)\vec{b} = \vec{0},$$

जो निम्नलिखित समीकरण–निकाय

$$3 + 2x - \lambda(x-2) = 0, \quad 2 + \lambda = 0,$$ के समतुल्य है।

इस प्रकार $x = \frac{1}{4}, \lambda = -2$.

अतः सदिश $\vec{c}$ और $\vec{d}$ संरेख हैं यदि और केवल यदि $x = \frac{1}{4}$.

इस स्थिति में सदिश

$$\vec{c} = -\frac{7}{4}\vec{a} + \vec{b}, \; \vec{d} = \frac{7}{2}\vec{a} - 2\vec{b}$$ है।

उदाहरण 17 तीन अशून्य सदिश $\vec{p}$, $\vec{q}$ और $\vec{r}$, जोड़े–वार असंरेख हैं। सदिश $\vec{p}+\vec{q}$ सदिश $\vec{r}$ के संरेख है, और सदिश $\vec{q}+\vec{r}$ सदिश $\vec{p}$ के संरेख है। सदिशों $\vec{p}$, $\vec{q}$ और $\vec{r}$ का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल चूँकि $\vec{p}+\vec{q}$, सदिश $\vec{r}$ के संरेख हैं, और $\vec{q}+\vec{r}$, सदिश $\vec{p}$ के संरेख हैं। अतः हम पाते हैं कि

$$\vec{p}+\vec{q}=\lambda\vec{r} \quad (1)$$

$$\vec{q}+\vec{r}=\mu\vec{p}, \quad (2)$$

जहाँ λ, μ अदिश हैं। (1) और (2) से हम पाते हैं, कि

$$\lambda\vec{r}+\vec{r}=\mu\vec{p}+\vec{p}$$

या $$(\lambda+1)\vec{r}-(\mu+1)\vec{p}=0. \quad (3)$$

चूँकि $\vec{p}$ और $\vec{r}$ असंरेख हैं, अतः (3) से हम पाते हैं, कि $\lambda+1=0$ और $\mu+1=0$ अर्थात $\lambda=-1$ और $\mu=-1$ है $\lambda=-1$ (1) में रखने पर या $\mu=-1$, (2) में रखने पर हम पाते हैं कि $\vec{p}+\vec{q}=-\vec{r}$ या $\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}=\vec{0}$.

प्रश्नावली 21.4

1. दर्शाइए कि बिन्दु जिनके स्थिति सदिश
   $2\hat{i}+6\hat{j}+3\hat{k}$, $\hat{i}+2\hat{j}+7\hat{k}$ और $3\hat{i}+10\hat{j}-\hat{k}$ संरेख हैं।

2. यदि $x_1\vec{a}+y_1\vec{b}=x_2\vec{a}+y_2\vec{b}$, जहाँ $\vec{a}$ और $\vec{b}$ असंरेख हैं, तो सिद्ध कीजिए कि, $x_1=x_2$ और $y_1=y_2$.

3. यदि $x_1\vec{a}+y_1\vec{b}+z_1\vec{c}=x_2\vec{a}+y_2\vec{b}+z_2\vec{c}$, और $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ असमतलीय सदिश हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $x_1=x_2$, $y_1=y_2$ और $z_1=z_2$.

4. सिद्ध कीजिए कि तीन सदिशों $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ को समतलीय होने के लिए आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबन्ध है कि अदिशों l, m, n का ऐसा अस्तित्व मिले जो सभी एक साथ शून्य न हों, और $l\,\vec{a}+m\,\vec{b}+n\,\vec{c}=\vec{0}$.

5. सिद्ध कीजिए कि तीन बिन्दु जिनके स्थिति सदिश $\vec{p}$, $\vec{q}$ और $\vec{r}$ हैं संरेख होंगे यदि और केवल यदि तीन अदिश l, m, n सभी एक साथ शून्य नहीं हो तथा ऐसे हों कि $l\,\vec{p}+m\,\vec{q}+n\,\vec{r}=\vec{0}$, तथा $l+m+n=0$.

6. दर्शाइए कि चार बिन्दु A, B, C और D जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ और $\vec{d}$ हैं, समतलीय होंगे यदि और केवल यदि $3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}-2\vec{d}=\vec{0}$.

7. सिद्ध कीजिए कि चार बिन्दु जिनके स्थिति सदिश $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ और $\vec{d}$ है, समतलीय होंगे यदि चार अदिश l, m, n और p, सभी एक साथ शून्य नहीं हों तथा ऐसे हों कि $l\,\vec{a}+m\,\vec{b}+n\,\vec{c}+p\,\vec{d}=\vec{0}$, साथ ही $l+m+n+p=0$.

अध्याय 21 पर विविध प्रश्नावली

1. यदि $\vec{u}=\hat{i}+2\hat{j}, \vec{v}=-2\hat{i}+\hat{j}$ और $\vec{w}=4\hat{i}+3\hat{j}$. तो अदिशों a और b का ऐसा मान ज्ञात कीजिए, ताकि $\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$.

2. सिद्ध कीजिए कि यदि $\vec{u}=u_1\hat{i}+u_2\hat{j}$ और $\vec{v}=v_1\hat{i}+v_2\hat{j}$ अशून्य सदिश हों साथ ही $\vec{u}\neq k\vec{v}$ जहाँ k कोई अदिश है, और $\vec{w}=w_1\hat{i}+w_2\hat{j}$ कोई अन्य सदिश हैं, तो a और b दो ऐसे अदिशों का अस्तित्व है ताकि $\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$.

3. x के ऐसे मान ज्ञात कीजिए, ताकि $x(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$ इकाई सदिश हो।

4. यदि एक त्रिभुज के शीर्षों के स्थिति सदिश $a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}, b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$, $c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$, हों, तो इनकी भुजाओं द्वारा प्राप्त सदिश क्या हैं? इन सदिशों की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

5. सिद्ध कीजिए कि तीन बिन्दु $A(1,-2,-8)$, $B(5,0,-2)$ और $C(11,3,7)$ संरेख हैं, और उस अनुपात को ज्ञात कीजिए, जिसमें B बिन्दु AC को विभाजित करता है।

6. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $\hat{i}-\hat{j}, 4\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$ और $2\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।

7. मूल बिन्दु O से उस त्रिभुज के केन्द्रक को मिलाने वाला सदिश ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष $(1,-1,2), (2,1,3)$ और $(-1,2,-1)$ हैं।

8. बिन्दु D, E, F किसी त्रिभुज BC, CA, AB की भुजाओं को क्रमशः 1 : 4, 3 : 2 और 3 : 7, में विभाजित करते हैं। दिखाइए कि सदिशों $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE}$ और $\overrightarrow{CF}$ का योगफल $\overrightarrow{CK}$ के समान्तर है, जहाँ K, AB को 1 : 3 में विभाजित करता है।

9. दर्शाइए कि सदिश $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ जो निम्नांकित द्वारा निर्धारित हैं,

$$\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{b} = 2\vec{j} + \vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

असमतलीय हैं। सदिश $\vec{d} = 2\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$ को सदिशों $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ के रैखिक संयोग के रूप में व्यक्त कीजिए।

10. बिन्दु F और E, एक समान्तर चर्तुभुज ABCD की भुजाओं BC और CD पर इस प्रकार लिए गए हैं कि

$|\overrightarrow{BF}| : |\overrightarrow{FC}| = \mu$, $|\overrightarrow{DE}| : |\overrightarrow{EC}| = \lambda$

रेखाएं FD और AE, O पर प्रतिच्छेदन करती हैं। अनुपात $|\overrightarrow{FO}| : |\overrightarrow{OD}|$ ज्ञात कीजिए।

11. $\hat{i}$, $\hat{j}$ तल में स्थित एक बिन्दु समान चाल से 12 सेकण्ड में एक वृत बनाता है। यदि, केन्द्र के सापेक्ष उसके प्रारम्भिक स्थिति का सदिश $\hat{i}$ हो, और घूर्णन $\hat{i}$ से $\hat{j}$ की ओर हो, तो 1, 3, 5, 7 सेकण्डों के पश्चात बिन्दु की स्थितियों का सदिश ज्ञात कीजिए। साथ ही 1½ सेकण्ड और 4½ सेकण्ड के पश्चात वाली स्थिति का भी सदिश ज्ञात कीजिए।

12. यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ असंरेख सदिश हैं और $\vec{p} = (x+4y)\vec{a} + (2x+y+1)\vec{b}$ और $\vec{q} = (y-2x+2)\vec{a} + (2x-3y-1)\vec{b}$ हैं, तो x और y ज्ञात कीजिए, जब $3\vec{p} = 2\vec{q}$.

13. सिद्ध कीजिए कि सदिश $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$, और $\vec{c} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$ एक त्रिभुज की भुजाएं बनाते हैं। त्रिभुज के माध्यिकाओं की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

14. त्रिभुज ABC के शीर्षों A, B, C के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ मूल बिन्दु O के सापेक्ष है तथा जहाँ कोण A का अर्द्धक BC से मिलता है, तो दर्शाइये कि बिन्दु D का सदिश

$$\vec{d} = \frac{\beta\vec{b} + \gamma\vec{c}}{\beta + \gamma} \text{ जहाँ } \beta = |\vec{c} - \vec{a}|, \quad \gamma = |\vec{a} - \vec{b}|.$$

अतः त्रिभुज के अन्तः केन्द्र I (त्रिभुज के कोणों के अर्द्धको के संगमन बिन्दु) का स्थिति सदिश

$$\overrightarrow{OI} = \frac{\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}}{\alpha + \beta + \gamma}$$ का निगमन कीजिए।

जहाँ $\alpha = |\vec{b} - \vec{c}|$.

एतिहासिक टिप्पणी

सदिश शब्द लैटिन शब्द से व्युत्पन्न है। जिसका अर्थ "ले जाना है"। सदिश विश्लेषण विषय उन्नीसवीं शताब्दी के उत्तरार्द्ध में अमेरीकी भौतिकी विद और गणितज्ञ जोशियाह विल्लार्ड गिब्ब्स (1839-1903 ई०) और अंग्रेज इन्जीनियर ओलिवर हैवी साइड (1850-1925 ई०) के स्वतन्त्र रूप से किए कार्यों द्वारा विकसित हुआ। तथापि अनेक विचारों का इसके पूर्व ही आयरिश गणितज्ञ विलियम रोवेन हैमिल्टन (1805-1865 ई०), स्काटिश भौतिक विद एच जी ग्रासमैन (1809-1877 ई०) द्वारा समावेश किया गया है। हैमिल्टन प्रथम व्यक्ति हैं, जिन्होंने अदिश (Scalar) और सदिश (Vector) पदों की भूमिका दिए। सन 1844 ई० में ग्रासमैन ने अपने कार्यों का प्रकाशन lineale ausdehnungslehre में कराया और 1883 में हैमिल्टन के भाषण–माला (Series Lectures) Quaternions प्रकाश में आई। हैमिल्टन की "method of quaternions" त्रिविमीय सदिशों के गुणन सम्बन्धी प्रश्नों का हल है। मैक्सवैल ने हैमिल्टन के विचारों का इलैक्ट्रो–मैगनेटिक थ्योरी (विद्युत्–चुम्बकीय सिद्धान्त) के अध्ययन में कुछ प्रयोग किया है।

सन् 1881 और 1884 में गिब्बस् ने सदिश विश्लेषण के तत्त्व (Element of Vector Analysis) शीर्षक धारी एक पत्रक प्रकाशित किया। यह पुस्तक सदिशों के सम्बन्ध में एक क्रमबद्ध और संक्षिप्त विवरण प्रस्तुत करती है। तथापि सदिशों के अनुप्रयोगों के प्रर्दशन का अधिकांश श्रेय हैवीसाइड और पी०जी० टैट (1831-1901 ई०) को प्राप्त है। श्री पी०जी० टैट [P.G. Tait] हेमिल्टन के शिष्य थे जिन्होंने इस विषय के विकास में महत्वपूर्ण भूमिका निभायी।

भाग ग (अध्याय 22 – 24)
गैर–विज्ञान के विद्यार्थियों के लिए

स्टॉक, शेयर तथा ऋणपत्र

अध्याय 22

(STOCKS, SHARES AND DEBENTURES)

22.1 भूमिका

जब कभी एक नये व्यावसायिक उद्यम, जिसमें एक बड़ी धनराशि का निवेश करना होता है, की योजना बनाई जाती है, तो उसमें पहली बात जो ध्यान में रखी जाती है वह यह है कि कितनी धनराशि की आवश्यकता होगी तथा साथ ही यह धन कहाँ से आयेगा तथा इसकी व्यवस्था कैसे की जायेगी। यह सत्य है कि इच्छित धनराशि तथा परियोजना के लिये कौशल्य जुटाना एक या दो व्यक्तियों के वश की बात नहीं है। ऐसी परिस्थिति में कुछ इच्छुक व्यक्ति एक साथ मिलकर समूह में एक कम्पनी बनाते हैं जिसे *संयुक्त स्टाक कम्पनी (Joint stock company)* कहते हैं। कम्पनी ऐक्ट के अनुसार यह कम्पनी पंजीकृत होती है। वे लोग जो मिलकर इस कम्पनी की रचना करते हैं उन्हें *प्रर्वतक (Promoter)* कहा जाता है। कम्पनी का एक संविधान होता है जिसमें इसका उद्देश्य, कार्यक्षेत्र तथा जनता से धनराशि एकत्र करने की विधि मुख्य रूप से अंकित रहती है। कम्पनी चलाने के लिए कुल आवश्यक धनराशि को इसकी *पूँजी (Capital)* कहते हैं तथा इसे जनता से निम्नलिखित विधि से प्राप्त किया जाता है।

कम्पनी के प्रर्वतक पूरी योजना की एक नियमावली निकालते हैं जिसमें योजना का उद्देश्य, सबलता तथा सम्भावित खतरे का विस्तारपूर्वक विवेचन रहता है। इसे जनता के बीच वितरित करते हुए उन्हें आंमत्रित किया जाता है तथा कम्पनी में सहभागी होने के लिए धनराशि लगाने हेतु अनुरोध किया जाता है। प्रायः कम्पनी की पूंजी को सुविधाजनक समान मूल्य की इकाइयों में विभक्त किया जाता है जिसे *शेयर (Share)* कहते हैं तथा प्रत्येक व्यक्ति जो कम्पनी के एक या अधिक शेयर खरीदता है, इसका *शेयरधारक (Shareholder)* कहलाता है। प्रत्येक शेयरधारक को कम्पनी *शेयर प्रमाण–पत्र (Share-certificate)* निर्गत करती है, जिसमें शेयर की संख्या, जिसे शेयरधारक ने क्रय किया है, लिखी रहती है। जब कम्पनी अपनी योजना में उल्लिखित उत्पाद का उत्पादन करना प्रारम्भ कर देती है तथा उसका बाजार में विक्रय प्रारम्भ कर देती है तो कम्पनी को उस पर लाभ प्रारम्भ होने लगता है। कार्य में आनेवाले खर्च, कर, ऋण पर ब्याज, यदि कोई हो, और लाभ के कुछ निश्चित भाग को एक सुरक्षित खाते में रखना ताकि योजना

का भविष्य में विकास किया जा सके, तथा आकस्मिक आवश्यकता की पूर्ति हो सके, इसके बाद भी यदि लाभ की राशि बचती है तो उसे शेयरधारकों में शेयरों की संख्या के अनुपात में वितरित कर दिया जाता है, जिसे *लाभांश (Dividend)* कहते हैं। इसकी घोषणा, वार्षिक, अर्धवार्षिक अथवा त्रैमासिक, जैसा कम्पनी की नियमावली में उल्लिखित रहता है, की जाती है। किसी शेयर पर लाभांश अंकित मूल्य के निश्चित–प्रतिशत में व्यक्त किया जाता है जो शेयर प्रमाण–पत्र में अंकित रहता है। कभी कभी यह राशि प्रति शेयर भी व्यक्त की जाती है। उदाहरण के लिए हम यह कह सकते हैं कि लाभांश प्रति शेयर अंकित मूल्य का 10% या 1.50 रु. प्रति शेयर है।

22.2 शेयर के प्रकार

सामान्यतः शेयर के दो प्रकार होते हैं।

(i) वरीयता प्राप्त शेयर (Preferred shares)

(ii) सामान्य या साधारण शेयर (Common or ordinary shares)

इन्हें हम एक एक करके स्पष्ट करेंगे।

(i) वरीयता प्राप्त शेयरः ये शेयर सामान्य शेयर से अधिक लाभकारी होते हैं क्योंकि इन शेयरधारकों का यह अनुबन्ध होता है कि शेयरधारकों को लाभांश का एक निश्चित प्रतिशत वितरित करने के पश्चात ही, सामान्य शेयरधारकों को लाभांश मिलेगा। कभी कभी कम्पनी को अपना खर्च, कर, आदि दे देने के पश्चात इतना भी लाभ नहीं होता है कि वह वरीयता प्राप्त शेयरधारकों को कुछ भी लाभांश दे सके। इस स्थिति में वरीयता प्राप्त शेयरधारक को कोई भी लाभांश नहीं मिल पाता।

(ii) सामान्य या साधारण शेयरः इन शेयरधारकों को कोई विशेष अधिकार नहीं मिलता है। ऐसे शेयरधारकों को तभी कोई लाभांश मिलता है जब सारे वरीयता प्राप्त शेयर धारक अपना लाभांश प्राप्त कर चुके होते हैं। लाभांश की दर भी कभी निश्चित नहीं रहती है और प्रत्येक वर्ष लाभ के अनुसार बदलती रहती है।

22.3 शेयर का अंकित मूल्य और बाजार मूल्य

वह मूल्य, जिस पर कम्पनी ने प्रारम्भ में अपने शेयरधारकों को शेयर वितरित किये हैं, शेयर का *अंकित मूल्य (Face value)* कहलाता है। (यह शेयर का *नामांकित (Nominal)* या *सम मूल्य (Par value)* भी कहलाता है)। वास्तव में यह वह मूल्य है, जो कम्पनी द्वारा शेयरधारकों को दिये गये शेयर प्रमाण पत्र में अंकित होता है।

दूसरी वस्तुओं की तरह ही शेयर भी बाजार में खरीदे या बेचे जाते हैं। शेयर का वह मूल्य जिस पर वह बाजार में खरीदा या बेचा जाता है, वह उसका *बाजार मूल्य (Market value)* कहलाता है। किसी भी शेयर का बाजार मूल्य उसकी मांग तथा आपूर्ति के साथ बदलता रहता है।

यदि किसी शेयर का बाजार मूल्य शेयर के अंकित मूल्य के समान होता है तो वह शेयर सममूल्य पर कहा जाता है। यदि बाजार मूल्य अंकित मूल्य से अधिक है तो शेयर को अधिमूल्य पर या प्रीमियम पर कहा जाता है, तथा यदि बाजार मूल्य, अंकित मूल्य से कम है तो उसे मूल्य से नीचे का शेयर, या बट्टे पर शेयर कहा जाता है।

इस बात को ठीक से समझ लेना चाहिये कि लाभांश हमेशा अंकित मूल्य पर परिकलित किया जाता है। प्रायः यह अंकित मान का कोई प्रतिशत होता है।

आइये हम कुछ उदाहरण लेकर इन संकल्पनाओं को स्पष्ट करें।

उदाहरण 1 एक कम्पनी ने 10% वार्षिक लाभांश की घोषणा की। रामलाल का लाभांश ज्ञात कीजिये जबकि उसके पास कम्पनी के 1500 शेयर हैं, जिसमें से प्रत्येक का सममूल्य 10 रु है।

हल शेयर पर वार्षिक लाभांश = 10 रु. का 10%

$$= \left(10 \times \frac{10}{100}\right) = 1 \text{ रु.}$$

इसलिए, राम लाल का वार्षिक लाभांश $= 1 \times 1500 = 1500$ रु.

विकल्पतः हम 1500 शेयरों का कुल सममूल्य प्रथमतः ज्ञात करके, पुनः उस पर 10% की दर से लाभांश ज्ञात करते हैं, जैसा कि नीचे दर्शाया गया है।

1500 शेयर का कुल सममूल्य $= (1500 \times 10)$ रु. $= 15000$ रु.

इसलिए, राम लाल का कुल वार्षिक लाभांश $= \left(15000 \times \frac{10}{100}\right)$ रु. $= 1500$ रु.

उदाहरण 2 एक कम्पनी ने 50000 शेयर, जिनमें से प्रत्येक का सममूल्य 10 रु. है, निर्गत किये। यदि कम्पनी द्वारा घोषित कुल लाभांश 62500 रु. हो तो कम्पनी द्वारा देय लाभांश की दर ज्ञात कीजिये।

हल शेयरों की संख्या $= 50000$

शेयर का सममूल्य $= 10$ रु.

इसलिये, 50000 शेयरों का सममूल्य $= 500000$ रु.

कुल लाभांश $= 62500$ रु.

इसलिये, कम्पनी द्वारा देय लाभांश की दर $= \left(\frac{62500}{500000} \times 100\right)\% = 12\frac{1}{2}\%$

उदाहरण 3 रक्षा के पास 100 सममूल्य के 50 वरीयता प्राप्त शेयर तथा 400 सामान्य शेयर हैं। यदि वरियता प्राप्त शेयर पर लाभांश 10% वार्षिक तथा सामान्य शेयर पर लाभांश 7.5% अर्धवार्षिक घोषित किया गया हो, तो रक्षा द्वारा प्राप्त वार्षिक लाभांश ज्ञात कीजिये।

हल 50 वरीयता प्राप्त शेयर पर लाभांश $= \left(50 \times 100 \times \frac{10}{100}\right) = 500$ रु.

400 सामान्य शेयर पर लाभांश $= \left(400 \times \frac{100}{100} \times \frac{15}{2} \times 2\right) = 6000$ रु.

इसलिये, रक्षा द्वारा प्राप्त कुल लाभांश = (500 + 6000) रु. = 6500 रु.

उदाहरण 4 मूल शेयरधारक से किसी कम्पनी के 150 शेयर खरीदने का मूल्य ज्ञात कीजिये जो प्रत्येक 10 रु. सममूल्य का है तथा जिनमें से प्रत्येक का बाजार मूल्य 16 रु. है। यदि वह प्रत्येक शेयर को 10 रु. अधिमूल्य (प्रिमियम) पर बेचे तो नये शेयरधारक का लाभ भी बताइये।

हल एक शेयर का बाजार मूल्य = 16 रु.

इसलिये, 150 शेयरों का बाजार मूल्य = 150 × 16 = 2400 रु.

इस प्रकार नये शेयरधारक ने 150 शेयर खरीदने में 2400 रु. खर्च किये। नये शेयरधारक ने शेयरों को 10 रु. अधिमूल्य पर बेच दिया। इसलिए,

शेयर का नया बाजार मूल्य = (10 + 10) रु. = 20 रु.

अर्थात् 150 शेयरों का नये बाजार मूल्य पर विक्रय मूल्य = (150 × 20) रु = 3000 रु. ।

इसलिये, सौदे में नये शेयर धारक का लाभ = (3000 – 2400) रु. = 600 रु.

उदाहरण 5 रजिया ने किसी कम्पनी के 200 शेयर जिसमें प्रत्येक का समूल्य 10 रु. है, सममूल्य पर खरीदे जिससे 15% लाभांश मिलता है। उसे अपने निवेश पर 12% लाभ मिलता है तो प्रति शेयर बाजार मूल्य ज्ञात कीजिये।

हल 200 शेयरों का सममूल्य = (200 × 10) रु. = 2000 रु.।

रज़िया द्वारा प्राप्त लाभांश $= \left(\frac{2000 \times 15}{100}\right)$ रु. = 300 रु.

मान लीज़िये कि 200 शेयरों का कुल बाजार मूल्य x रु. है। अब हमें ज्ञात करना है x का 12% = 300 रु.

$$\frac{12}{100} \times x = 300$$

इसलिये $x = \frac{100 \times 300}{12} = 2500$

अर्थात् 200 शेयरों का बाजार मूल्य = 2500 रु.

अतः एक शेयर का बाजार मूल्य = 12.50 रु.

उदाहरण 6 एक कम्पनी की पूँजी 20% लाभांश वाले 50000 वरीयता प्राप्त शेयरों तथा 20000 सामान्य शेयरों जिनमें प्रत्येक प्रकार के शेयर का सममूल्य 10 रु. है, से निर्मित है। कम्पनी को 1,80,000 रु. का कुल लाभ हुआ, जिसमें से 30,000 रु. सुरक्षित कोष में रखे गए तथा शेष को शेयरधारकों में वितरित किया गया। सामान्य शेयरधारकों को भुगतान किये गए लाभांश की दर ज्ञात कीजिये।

हल कम्पनी की कुल लाभ = 180000 रु.

सुरक्षित कोष में रखी गई राशि = 30000 रु.

इसलिये, शेयरधारकों को भुगतान किया गया लाभांश = (180000 – 30000) रु. = 150000रु.

और 50, 000 वरीयता प्राप्त शेयरों पर कम्पनी द्वारा भुगतान किया गया लाभांश

$$= \left(50000 \times \frac{10 \times 20}{100}\right) \text{रु.} = 100000 \text{ रु.}$$ ।

इसलिये, सामान्य शेयरधारकों को भुगतान किया गया लाभांश = (150000 – 100000) रु.
= 50000 रु.

इस प्रकार प्रति सामान्य शेयर पर भुगतान लाभांश = $\left(\frac{50000}{20000}\right)$ रु. = 2.50 रु.

अतः, प्रतिशत प्रति सामान्य शेयर पर भुगतान लाभांश = $\left(\frac{2.50}{10} \times 100\right)\% = 25\%$.

उदाहरण 7 एक व्यक्ति किसी कम्पनी A के सामान्य शेयर (प्रत्येक 10 रु. सममूल्य वाला) जिसपर लाभांश 20% है, 30 रु. प्रति शेयर के भाव से बेचता है। वह इस प्रकार प्राप्त राशि को दूसरी कम्पनी B के सामान्य शेयरों (प्रत्येक 25 रु. सममूल्य वाला) जो 15% लाभांश देती है, में निवेश करता है। यदि कम्पनी B के एक शेयर का बाजारमूल्य 40 रु. हो, तो निम्न ज्ञात कीजिए:

(i) व्यक्ति द्वारा खरीदे गए कम्पनी B के शेयरों की संख्या।

(ii) व्यक्ति को लाभांश की आय में अन्तर।

हल कम्पनी A के 20% लाभांश वाले 5000 सामान्य शेयरों से व्यक्ति की आय

$$= \left(\frac{5000 \times 10 \times 20}{100}\right) \text{ रु.} = 10000 \text{ रु.}$$

कम्पनी A के एक शेयर का विक्रयमूल्य = 30 रु.

इसलिये, कम्पनी A के 5000 शेयरों का विक्रय मूल्य = (5000 × 30) रु. = 150000 रु.

(i) कम्पनी B के एक शेयर का बाजारमूल्य = 40 रु.।

इसलिये 150000 रु. से व्यक्ति द्वारा खरीदे गए कम्पनी B के शेयरों की संख्या

$$= \left(\frac{150000}{40}\right) = 3750$$

(ii) कम्पनी B के 15% लाभांश वाले शेयरों से आय

$$= \left(\frac{3750 \times 25 \times 15}{100}\right) \text{ रु.}$$

$$= 14062.50 \text{ रु.}$$

इसलिए व्यक्ति की आय मे अन्तर = (14062.50 – 10000) रु. = 4062.50 रु.

उदाहरण 8 एक कम्पनी के शेयर, जिनमें से प्रत्येक का सममूल्य 10 रु. है, 20% अधिमूल्य पर उपलब्ध हैं। खरीददार द्वारा भुगतान की गई राशि ज्ञात कीजिये जो 2500 शेयर खरीदना चाहता है। यदि खरीददार उन शेयरों को 20 रु. प्रति शेयर के भाव बेचता है, तो उसे क्या लाभ होगा?

हल एक शेयर का सममूल्य = 10 रु.

$$\text{एक शेयर का बाजार मूल्य} = \left(10 \times \frac{120}{100}\right) \text{ रु.} = 12 \text{ रु.}$$

खरीददार द्वारा 2500 शेयरों के क्रय करने में भुगतान की गई राशि

= (2500 × 12) रु. = 30000 रु.

एक शेयर बेचने पर शेयरधारक को लाभ

= (20 – 12) रु. = 8 रु.

इसलिए 2500 शेयर बेचने से लाभ

= (2500 × 8) रु. = 20000 रु.

प्रश्नावली 22.1

1. निम्नलिखित स्थितियों में से प्रत्येक में दिया गया वार्षिक लाभांश ज्ञात कीजिये :

क्रम संख्या	*शेयर का सममूल्य*	*सामान्य शेयरों की संख्या*	*सामान्य शेयर पर घोषित लाभांश*
(i)	10 रु.	500	10% प्रतिवर्ष
(ii)	10 रु.	200	5% प्रतिवर्ष
(iii)	10 रु.	800	5% अर्धवार्षिक
(iv)	100 रु.	1500	5% त्रैमासिक
(v)	10 रु.	3000	10% अर्धवार्षिक
(vi)	10 रु.	2500	2% मासिक
(vii)	100 रु.	5000	7½% प्रतिवर्ष
(viii)	20 रु.	1200	2½% त्रैमासिक

2. एक कम्पनी ने 10% का वार्षिक लाभांश घोषित किया। यदि रेखा के पास कम्पनी के 4000 शेयर (जिनमें से प्रत्येक का सममूल्य 100 रु. है) हों, तो उसका वार्षिक लाभांश ज्ञात कीजिए।

3. एक दवाइयाँ बनाने वाली कम्पनी ने 7½% का अर्धवार्षिक लाभांश घोषित किया। यदि रहमान के पास कम्पनी के 1250 शेयर, जिनमें प्रत्येक का सामान्य मूल्य 10 रु. है, हों तो उसका वार्षिक लाभांश ज्ञात कीजिये।

4. एक कम्पनी ने 125000 शेयर, जिनमें प्रत्येक शेयर का सममूल्य 20 रु. है, जारी किये। यदि कम्पनी ने 375000 रु. के कुल लाभांश की घोषणा की तो कम्पनी द्वारा दिये गये लाभांश की दर निकालिये। राम को मिलने वाला लाभांश भी ज्ञात कीजिए यदि उसके पास कम्पनी के 1000 शेयर हों।

5. अनिल के पास 200 वरीयता प्राप्त शेयर एंव 1000 सामान्य शेयर हैं। दोनों प्रकार के शेयरों में से प्रत्येक का सममूल्य 100 रु. है। यदि वरीयता प्राप्त शेयर पर 10% वार्षिक लाभांश तथा सामान्य शेयर पर 12½% वार्षिक लाभांश घोषित किया गया हो, तो अनिल द्वारा प्राप्त वार्षिक लाभांश ज्ञात कीजिए।

6. एक टेक्स्टाइल कम्पनी ने 50000 शेयर, जिनमें से प्रत्येक का सममूल्य 100 रु. है, निर्गत किये। कम्पनी ने कुल लाभांश 125000 रु. घोषित किया जिसमें से 50000 रु. सुरक्षित कोष में रखे गये तथा शेष को लाभांश के रूप में वितरित किया गया। कम्पनी द्वारा दिये गये लाभांश की दर ज्ञात कीजिए। साथ ही कम्पनी से श्याम को मिला लाभांश भी ज्ञात कीजिए। यदि उसके पास कम्पनी के 250 शेयर हैं।

7. रोजा के पास 1200 वरीयता प्राप्त शेयर तथा 3000 सामान्य शेयर हैं। दोनों प्रकार के शेयरों में से प्रत्येक का सममूल्य 50 रु. है। तो रोजा का वार्षिक लाभांश ज्ञात कीजिये जबकि वरीयता प्राप्त शेयर पर 10% वार्षिक, सामान्य शेयर पर 3½% अर्धवार्षिक लाभांश घोषित किया गया है।

8. किसी कम्पनी के 100 रु. सममूल्य वाले 400 शेयरों को उनके मूलधारक से खरीदा जाता है। यदि प्रत्येक शेयर बाजार में 125 रु. पर उपलब्ध हो, तो इन शेयरों को खरीदने में लगी राशि ज्ञात कीजिए। साथ ही खरीदने वाले का लाभ भी ज्ञात कीजिए यदि वह प्रतिशेयर को 45 रु. अधिमूल्य पर बेच देता है।

9. अहमद ने 20 रु. सममूल्य वाले 12500 शेयर हरी से 25 रु. प्रति शेयर के भाव पर खरीदे। शेयर खरीदने के लिये आवश्यक धनराशि ज्ञात कीजिए। यदि अहमद सभी शेयरों को प्रति शेयर 11 रु. के अधिमूल्य पर बेचता है, तो इस सौदे में उसका लाभ ज्ञात कीजिए ।

10. लक्ष्मण किसी कम्पनी के, जो 8% वार्षिक लाभांश देती है, 10 रु. प्रति शेयर सममूल्य वाले 200 शेयर ऐसे मूल्य पर खरीदता है कि उसे अपने निवेश पर 10% लाभ होता है। एक शेयर का बाजार भाव ज्ञात कीजिए।

11. शकीला किसी कम्पनी, जो 15% वार्षिक लाभांश देती है, के 10 रु. प्रति शेयर सममूल्य वाले 12000 शेयर ऐसे मूल्य पर खरीदती है कि उसे अपने निवेश पर 10% लाभ होता है। एक शेयर का बाजार भाव ज्ञात कीजिये।

12. एक कम्पनी की पूंजी 15% वार्षिक लाभांश वाले 5000 वरीयता प्राप्त शेयरों तथा 20000 सामान्य शेयरों से निर्मित है। दोनों प्रकारों के शेयरों में से प्रत्येक का सममूल्य 100 रु. है। कम्पनी को 10 लाख रु. का लाभ हुआ जिसमें से 6 लाख रु. दैनिक खर्च के लिये, 1.25 लाख रु. आकस्मिक खर्च के लिए तथा शेष को लाभांश के रूप में वितरित कर दिया गया। सामान्य शेयरों पर लाभांश की दर ज्ञात कीजिए।

13. एक कम्पनी 100 रु. सममूल्य वाले के 10000 वरीयता प्राप्त शेयर तथा 50000 सामान्य शेयर निर्गत करती है। वरीयता प्राप्त शेयर तथा सामान्य शेयर पर लाभांश क्रमशः 12% और 17.6% हैं। कम्पनी को 15 लाख रु. का लाभ होता है, जिसमें से कुछ धनराशि सुरक्षित खाते में रख कर, शेष को लाभांश के रूप में वितरित कर देती है। सुरक्षित कोष में रखी धनराशि ज्ञात कीजिए।

14. किसी कम्पनी A के 50 रु. सममूल्य वाले सामान्य शेयर जिन पर 15% लाभांश है, शीला ऐसे 5000 शेयर 75 रु. प्रतिशेयर के भाव से बेचती है। वह बेचने पर प्राप्त धन को कम्पनी B के शेयरों में जिनका सममूल्य 50 रु. है तथा जिन पर 12% लाभांश है, लगा देती है। यदि कम्पनी B के शेयरों का बाजार भाव 60 रु. है, तो

(i) शीला द्वारा कम्पनी B के खरीदे गये शेयरों की संख्या ज्ञात कीजिये।

(ii) शीला द्वारा प्राप्त लाभांश आय में अन्तर ज्ञात कीजिये।

15. हमीदा किसी कम्पनी A के 20,000 शेयरों को जिनमें से प्रत्येक का सममूल्य 10 रु. है तथा जिन पर 10% लाभांश है, 25 रु. प्रति शेयर के भाव से बेचती है। इस प्रकार प्राप्त धनराशि को वह कम्पनी B के सामान्य शेयरों में जिनमें से प्रत्येक का सममूल्य 25 रु. है तथा जिन पर 16% लाभांश हैं, लगा देती है। यदि कम्पनी B के एक शेयर का बाजार भाव 40 रु. है, तो

(i) हमीदा द्वारा कम्पनी B के खरीदे गये शेयरों की संख्या ज्ञात कीजिये।

(ii) हमीदा द्वारा प्राप्त लाभांश आय में अन्तर ज्ञात कीजिये।

22.4 स्टॉक तथा दलाली (Stocks and Brokerage)

22.4.1 ***स्टॉक*** पिछले अनुच्छेद में आप पढ़ चुके हैं कि शेयर खरीदे और बेचे जा सकते हैं। यदि किसी व्यक्ति के पास किसी कम्पनी के 15000 शेयर हैं, जिनमें से प्रत्येक का सममूल्य 10 रु. है, तो यह कहा जा सकता है कि उस व्यक्ति के पास उस कम्पनी का 150000 रु. का स्टॉक है।

सामान्यतः स्टॉक का नामांकन उस पर मिलने वाले लाभांश की दर से किया जाता है। अतः यदि किसी 100 रु. के स्टॉक पर लाभांश 10 रु. मिलता है तो उसे 10% स्टॉक कहा जाता है।

जैसा कि हम जानते हैं कि शेयरों को बाजार में खरीदा व बेचा जा सकता है। उसी प्रकार स्टॉक को भी बाजार में खरीदा और बेचा जा सकता है। यदि किसी 100 रु. के स्टॉक का जिसपर लाभांश 5 रु. मिलता है, बाजार मूल्य 115 रु. है तो उस स्टॉक को 115 पर उपलब्ध 5% स्टॉक कहते हैं। इसी प्रकार 120 पर उपलब्ध 10% स्टॉक का अर्थ है कि एक स्टॉक जिसका अंकित मूल्य 100 रु. है तथा जिस पर लाभांश 10 रु. है, वह बाजार में 120 रु. पर उपलब्ध है।

टिप्पणी: ऐसे भी स्टॉक हो सकते हैं जो 100 रु. से भिन्न हों जैसे 500 रु. का स्टॉक, 1000 रु. का स्टॉक इत्यादि। "90 पर उपलब्ध 8% स्टॉक" का प्रयोग केवल उसी स्टॉक के लिए कर सकते हैं जिसका अंकित मूल्य 100 रु. हो।

22.4.2 ***दलाली*** स्टॉक की खरीद (क्रय) तथा बिक्री साधारणतः किसी स्टॉक के दलाल के माध्यम से होती है, जो इस कार्य के लिए कुछ धनराशि लेता है जिसे *दलाली (Brokerage)* कहते हैं। यह धनराशि वह विक्रेता तथा खरीददार दोनों से लेता है। *यह दलाली या तो स्टॉक की एक इकाई पर एक निश्चित राशि के रूप में होती है या उस स्टॉक की एक इकाई के बाजार मूल्य के किसी प्रतिशत के रूप में होती है।*

अतः x रु. की दलाली का अर्थ है कि स्टॉक की इकाई के बाजार मूल्य में x या तो जोड़ते हैं या घटाते हैं। इस दलाली का अर्थ है कि दलाली, स्टॉक की इकाई के बाजार मूल्य के 2% के बराबर है और इसे स्टॉक की इकाई के बाजार मूल्य में जोड़ना (या घटाना) होता है।

नियम के अनुसार

(i) जब स्टॉक खरीदा जाता है तो दलाली को स्टॉक की इकाई के बाजार मूल्य में जोड़ा जाता है;

(ii) जब स्टॉक बेचा जाता है तब दलाली को स्टॉक की इकाई के बाजार मूल्य में से घटाया जाता है।

22.5 स्टॉक पर आय का परिकलन

जब कुल स्टॉक का अंकित मूल्य दिया हो तो आय का परिकलन यह मान कर किया जा सकता है कि स्टॉक की इकाई का अंकित मूल्य 100 रु. है। इसके विपरीत यदि स्टॉक की इकाई का बाजार मूल्य अथवा कुल निवेश की राशि दी गई हो तो इस स्थिति में स्टॉक की इकाई के बाजार मूल्य पर आय की गणना की जा सकती है।

आइये उदाहरणों द्वारा इन्हें स्पष्ट करें।

उदाहरण 9 25000 रु. के 10% स्टॉक पर आय ज्ञात कीजिए जिसे 120 रु. में खरीदा गया है।

हल स्टॉक का अंकित मूल्य = 25000 रु.

चूंकि 100 रु. स्टॉक पर आय = 10 रु.

इसलिये 1 रु. स्टॉक पर आय = $\left(\frac{10}{100}\right)$ रु.

अतः 25000 रु. के स्टॉक पर आय = $\left(\frac{25000\times10}{100}\right)$ = 2500 रु.

उदाहरण 10 $7\frac{1}{2}$ पर उपलब्ध $7\frac{1}{2}\%$ स्टॉक में 90000 रु. निवेश करने पर स्टॉक पर हुई आय ज्ञात कीजिये।

हल यहाँ स्टॉक का बाजार मूल्य = 90000 रु.

चूंकि $112\frac{1}{2}$ रु. का स्टॉक 100 रु. में उपलब्ध है, इसलिए $112\frac{1}{2}$ रु. पर आय $7\frac{1}{2}\%$ रु. है।

अतः 90000 रु. पर आय $= \left(\frac{15}{2}\times\frac{2}{225}\times90000\right)$ रु.

$= 6000$ रु.

उदाहरण 11 एक व्यक्ति 72000 रु. का 144 पर उपलब्ध $9\frac{1}{2}\%$ स्टॉक खरीदता है तो उसकी वार्षिक आय ज्ञात कीजिए।

हल स्टाक का अंकित मान = 72000 रु.

इसलिये स्टॉक पर आय $= \left(\frac{72000}{100} \times \frac{19}{2}\right) = 6840$ रु.

उदाहरण 12 राम ने 81½ (दलाली 1 रु.) पर उपलब्ध 7½% स्टॉक में 99000 रु. निवेश किया तो राम की वार्षिक आय ज्ञात कीजिये।

हल 100 रु. के स्टॉक का बाजार मूल्य = (81½ + 1) रु. = 82½ रु.

अतः 82½ रु. पर आय = 7½ रु.

इसलिये, 99000 रु. पर वार्षिक आय $= \left(\frac{15}{2} \times \frac{2}{165} \times 99000\right)$ रु. = 9000 रु.

22.6 स्टॉक के निवेश या बाजार मूल्य का परिकलन

यदि किसी स्टॉक का अंकित मूल्य ज्ञात हो, तो उसका बाजार मूल्य स्टॉक इकाई के बाजार मूल्य के आधार पर ज्ञात किया जा सकता है।

आइये इसे हम उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करें।

उदाहरण 13 125000 रु. के 92 पर 8% स्टॉक को खरीदने के लिये निवेश की धनराशि ज्ञात कीजिए।

हल 100 रु. के स्टॉक का बाजार मूल्य = 92 रु.

इसलिए 125000 रु. के स्टॉक का बाजार मूल्य $= \left(\frac{92}{100} \times 125000\right)$ रु.

= 115000 रु.

अतः 115000 रु. का निवेश करने पर 125000 रु. का 8% स्टॉक जो 92 पर उपलब्ध है, मिलेगा।

उदाहरण 14 90 दलाली 1% पर उपलब्ध 9½% स्टॉक से 1938 रु. की आय प्राप्त करने के लिए निवेश की राशि ज्ञात कीजिए।

हल दलाली = 90 रु. का 1% = 0.90 रु.

अतः 100 रु. का स्टॉक खरीदने के लिये आवश्यक निवेश = 90.90 रु. जिसपर आय 9½% है

अतः 9½ रु. की आय के लिए निवेश की राशि = 90 रु.

इसलिए 1938 रु. की आय के लिये निवेश की राशि $= \left(\frac{90.90\times2}{19}\times1938\right)$ रु.

$= 18543.60$ रु.

22.7 स्टॉक के विक्रय तथा क्रय मे लाभ या हानि का परिकलन

जब स्टॉक धारकों के लिये बाजार लाभदायक हो, अर्थात यदि उनके स्टॉक के लिये, अधिक लाभ मिलने की सम्भावना हो तो वे अपना स्टॉक विक्रय करते हैं और प्राप्त धनराशि को दूसरे स्टॉक में निवेश करते हैं ताकि उन्हें पहले से अधिक आय हो। ऐसी स्थितियों में, आय का अन्तर निकालने की प्रक्रिया को निम्न उदाहरणों से दर्शाते हैं।

उदाहरण 15 अरूण ने 12000 रु. का 92 पर उपलब्ध 8% स्टॉक खरीदा और जब मूल्य 98 रु. हो गया तब बेच दिया। अरूण का कुल लाभ और लाभ प्रतिशत निकालिये।

हल अरूण द्वारा 12000 रु. का 92 पर उपलब्ध 8% स्टॉक में खरीदने पर किया गया निवेश

$$= \left[12000\times\frac{92}{100}\right] \text{ रु.} = 11040 \text{ रु.}$$

किन्तु जब मूल्य 98 रु. हो गया तो अरूण ने उसे बेच दिया।

अतः स्टॉक बेचने पर जो अरूण को मिली धनराशि $= \left[12000\times\frac{98}{100}\right]$ रु. $= 11760$ रु.

इसलिए दूसरे स्टॉक में निवेश पर लाभ $= (11760 - 11040)$ रु. $= 720$ रु.

अतः प्रतिशत लाभ $= \frac{(720\times100)}{11040} = 6\frac{12}{23}\%$.

उदाहरण 16 एक व्यक्ति ने 92 पर उपलब्ध 4% स्टॉक में 27600 रु. का निवेश किया। जब स्टॉक का मूल्य बढ़कर 96 रु. हो गया तब उसने 20000 रु. का स्टॉक बेच दिया तथा जब शेष स्टॉक का बाजार मूल्य गिरकर 90 रु. हो गया तब उसने उसको बेच दिया। इस सौदे में उसे कितना लाभ या हानि हुई?

हल 92 पर उपलब्ध 4% स्टॉक खरीदने में 27600 रु. का निवेश करने पर मिला स्टॉक

$$= \left(\frac{27600\times100}{92}\right) \text{ रु.} = 30000 \text{ रु.}$$

बाजार मूल्य 96 रु. पर 20000 रु. का स्टॉक बेचने पर मिलने वाली राशि

$$= \left(\frac{20000 \times 96}{100}\right) \text{ रु.} = 19200 \text{ रु.}$$

शेष स्टॉक = (30000 – 20000) रु. = 10000 रु.

अतः 10000 रु. के स्टॉक को 90 रु. की दर से बेचने पर मिलने वाली राशि

$$= \left(10000 \times \frac{90}{100}\right) \text{ रु.} = 9000 \text{ रु.}$$

अतः कुल स्टॉक से मिली राशि

= (19200 + 9000) रु. = 28200 रु.

चूँकि व्यक्ति ने 27600 रु. निवेश किया था

अतः लाभ = (28200 – 27600) रु. = 600 रु.

22.7.1 ***बिक्री अथवा पुनर्निवेश करने पर आय में बदलाव*** एक व्यक्ति एक प्रकार का स्टॉक रखने के पश्चात् उसे बेचकर पहले से अधिक आय प्राप्त करने के लिए दूसरा स्टॉक खरीद सकता है। इस तरह के प्रश्नों में दोनों में होने वाली आय का परिकलन किया जाता है तथा अन्तर निकाला जाता है।

आइये कुछ उदाहरण लेकर इसे स्पष्ट करें।

उदाहरण 17 एक व्यक्ति 95 पर उपलब्ध 5% स्टॉक में 34200 रु. का निवेश करने के पश्चात् जब स्टॉक मूल्य 98 रु. हो जाता है तो उसे बेच देता है। इस प्रकार प्राप्त की गई राशि को वह (112 पर उपलब्ध 8% स्टॉक) में निवेश करता है। व्यक्ति की आय में अन्तर ज्ञात कीजिए।

हल प्रथम स्टॉक से आय $= \left(\frac{34200 \times 5}{95}\right)$ रु. = 1800 रु.

अब हमें प्रथम स्टॉक बेचने पर मिलने वाली राशि निकालनी है।

चूँकि 95 रु. का स्टॉक बेचने पर मिलने वाली राशि = 98 रु.

इसलिये 34200 रु. का स्टॉक बेचने पर मिलने वाली राशि $= \left(\frac{98 \times 34200}{95}\right)$ रु. = 35280 रु.

अब चूँकि 112 रु. का स्टॉक बेचने पर आय = 8 रु.

इसलिए, 35280 का स्टॉक बेचने पर आय $= \left(\frac{8}{112} \times 35280\right)$ रु. = 2520 रु.

अतः आय में बढ़ोत्तरी = (2520 – 1800) रु. = 720 रु.

उदाहरण 18 90 पर उपलब्ध 6% स्टॉक में राम ने 16200 रु. का निवेश किया। उसने 9000 रु. के स्टॉक को जब मूल्य बढ़कर 95 रु. हो गया, तब बेच दिया और शेष स्टॉक का मूल्य 96 रु. हो गया तब उसे बेच दिया। इस प्रकार उसे जो धनराशि प्राप्त हुई, उसे $85\frac{19}{20}$ पर उपलब्ध 7.5% स्टॉक में निवेश कर दिया। राम की आय में अन्तर ज्ञात कीजिए।

हल प्रथम स्टॉक से आय = $\left(\frac{16200\times6}{90}\right)$ रु. = 1080 रु.

अब राम द्वारा खरीदा गया स्टॉक = $\left(\frac{16200\times100}{90}\right)$ रु. = 18000 रु.

अब 9000 रु. के स्टॉक को 95 रु. पर बेचने पर प्राप्त राशि = $\left(\frac{9000\times95}{100}\right)$ रु. = 8550 रु.

तथा शेष 9000 रु. स्टॉक को 96 रु. पर बेचने पर प्राप्त राशि = $\left(\frac{9000\times96}{100}\right)$ रु. = 8640 रु.

इसलिए, कुल प्राप्त धनराशि = (8550 + 8640) रु. = 17190 रु. $85\frac{19}{20}$ पर उपलब्ध 7.5% स्टॉक में 17190 रु. का निवेश करने पर आय = $\left(\frac{17190\times15\times20}{2\times1719}\right)$ रु.

= 1500 रु.

अतः आय में अन्तर = (1500 – 1080) रु. = 420 रु.

उदाहरण 19 102 पर उपलब्ध 4% स्टॉक में एक व्यक्ति ने 21000 रु. का निवेश किया तथा जब स्टॉक का मूल्य बढ़कर 105 रु. हो गया तब उसे बेच दिया। इस प्रकार प्राप्त धनराशि को 99 पर उपलब्ध 6% स्टॉक में लगा दिया। आय में अन्तर ज्ञात कीजिये (दलाली : 3 रु.)।

हल प्रथम स्टाक का खरीद मूल्य = (102 + 3) = 105 रु.

अतः प्रथम स्टॉक पर आय = $\left(\frac{4}{105}\times21000\right)$ रु. = 800 रु.

नये स्टॉक का विक्रय मूल्य = (105 – 3) = 102 रु.

अतः प्रथम स्टॉक के बेचने से प्राप्त राशि = $\left(\frac{21000\times102}{105}\right)$ रु. = 20400 रु.

द्वितीय स्टॉक का खरीद मूल्य = (99 + 3) = 102 रु.

अतः द्वितीय स्टॉक पर आय = $\left(\frac{20400 \times 6}{102}\right)$ रु. = 1200 रु.

इसलिये, आय में अन्तर = (1200 – 800) रु. = 400 रु.

उदाहाण 20 120 पर उपलब्ध 5% स्टॉक में एक व्यक्ति ने 180000 रु. का निवेश किया। जब उसका मूल्य बढ़कर 130 रु. हो गया तब स्टॉक बेच दिया और इस प्रकार प्राप्त धनराशि को 6% स्टाक में निवेश कर दिया। इस प्रकार उसकी आय में 1500 रु. की वृद्धि हो गई। किस मूल्य पर व्यक्ति ने दूसरा स्टॉक खरीदा था?

हल प्रथम स्टॉक पर आय = $\left(180000 \times \frac{5}{120}\right)$ रु. = 7500 रु.

जब मूल्य 130 रु. हो गया तब स्टॉक बेचने पर प्राप्त की गई राशि

$$= \left(\frac{180000 \times 130}{120}\right) \text{ रु.} = 195000 \text{ रु.}$$

अब चूँकि दूसरे स्टॉक को बेचने पर 1500 रु. की वृद्धि हुई है।

अतः द्वितीय स्टॉक में आय = (7500 + 1500) रु. = 9000 रु.

अब माना कि द्वितीय स्टॉक का बाजार मूल्य x है

अतः $\frac{195000 \times 6}{x} = 9000$

या $9000\,x = 1170000$

या $x = 130,$

अतः उस व्यक्ति ने द्वितीय स्टॉक 130 रु. के भाव से खरीदा।

22.7.2 ***विभिन्न स्टॉकों में आंशिक–निवेश*** कोई भी व्यक्ति अपनी पूरी धनराशि का कुछ भाग एक स्टॉक में तथा शेष दूसरे स्टॉको में कर सकता है। यदि विभिन्न स्टॉकों से कुल आय ज्ञात हो तो विभिन्न स्टॉकों में की गई निवेशित राशि का पता लगाया जा सकता है।

आइये उदाहरणों द्वारा इसे स्पष्ट करें।

उदाहरण 21 असलम ने 180000 रु. की राशि का कुछ भाग 90 पर उपलब्ध 5% स्टॉक में तथा शेष राशि को 120 पर उपलब्ध 6% स्टॉक में निवेश किया। यदि उनको इन दोनों स्टॉकों से प्राप्त कुल आय 9600 रु. है तो दोनों तरह के स्टॉकों में निवेशित राशि ज्ञात कीजिए।

हल माना कि प्रथम स्टॉक में निवेशित राशि x रु. है।

अतः द्वितीय स्टॉक में निवेशित राशि $= (180000 - x)$ रु.

प्रथम स्टॉक में निवेशित राशि पर आय $= \left(x \times \frac{5}{90}\right) = \frac{x}{18}$ रु.

द्वितीय स्टॉक में निवेशित राशि पर आय $= \left[\frac{(180000 - x) \times 6}{120}\right] = \frac{(180000 - x)}{20}$ रु.

$$\text{अतः कुल आय} = \left[\frac{x}{18} + \frac{180000 - x}{20}\right]$$

$$= \left[\frac{10x + 180000 \times 9 - 9x}{180}\right]$$

$$= \left[\frac{x + 180000 \times 9}{180}\right]$$

यह 9600 रु. के समान है

इसलिए $x + 180000 \times 9 = 9600 \times 180$

या $x = 180\ (9600 - 9000) = 108000$

अर्थात प्रथम स्टॉक में निवेशित राशि 108000 रु. तथा द्वितीय स्टॉक में निवेशित राशि 72000 रु. है।

उदाहरण 22 एक व्यक्ति ने 245700 रु. की राशि का कुछ भाग 94½ पर उपलब्ध 3½% स्टॉक में तथा शेष राशि को 112½ पर उपलब्ध 4½% स्टॉक में निवेश किया। यदि दोनों निवेशों में आय बराबर होती है तो प्रत्येक स्टॉक में निवेश की गई राशि ज्ञात कीजिए तथा प्रत्येक से हुई आय भी ज्ञात कीजिए।

हल माना कि 94½ पर उपलब्ध 3½% स्टॉक में निवेशित राशि x रु. है।

अतः द्वितीय स्टॉक में निवेशित राशि $= (245700 - x)$ रु.

इसलिये प्रथम राशि में निवेशित राशि पर आय $= \left(\frac{x \times 3\frac{1}{2}}{94\frac{1}{2}}\right) = \text{Rs}\left(\frac{x \times 7 \times 2}{2 \times 189}\right)$ रु. $= \frac{x}{27}$ रु.

पुनः द्वितीय स्टॉक में निवेशित राशि पर आय $= \left[\frac{(245700 - x)4\frac{1}{2}}{112\frac{1}{2}}\right]$ रु.

$$= \frac{(245700-x)}{25} \text{ रु.}$$

प्रश्न में दिए गए प्रतिबन्ध के अनुसार दोनों आय समान हैं

अतः $\frac{x}{27} = \frac{245700-x}{25}$

या $25x = 245700 \times 27 - 27x$

या $52x = 245700 \times 27$ या $x = \frac{245700-27}{52}$

या $x = 127575$

अतः प्रथम स्टॉक (94½ पर उपलब्ध 3½% स्टॉक) में निवेशित राशि = 127575 रु.

तथा द्वितीय स्टॉक में निवेशित राशि = (245700 – 127575) रु. = 118125 रु.

अतः प्रथम स्टॉक पर आय $= \frac{127575}{27}$ रु. = 4725 रु.

तथा द्वितीय स्टॉक पर आय $= \frac{118125}{25}$ रु. = 4725 रु.

प्रश्नावली 22.2

1. आय ज्ञात कीजिये :

(i) 60000 रु. के 12% स्टॉक पर जो 110 रु. में खरीदा गया हो।

(ii) 495000 रु. के 10% स्टॉक पर जो 90 रु. में खरीदा गया हो।

(iii) 20000 रु. के 7½% स्टॉक पर जो 120 रु. में खरीदा गया हो।

2. विभिन्न धन राशियों को निम्न प्रकार से निवेशित करने पर आय ज्ञात कीजिए:

(i) 135 पर उपलब्ध 9% स्टॉक में 81000 रु.।

(ii) 108 पर उपलब्ध 6% स्टॉक में 54000 रु.।

(iii) 104 पर उपलब्ध 6% स्टॉक में 83200 रु.।

3. किशन लाल ने 92000 रु. 91 पर उपलब्ध 9½% स्टॉक, (दलाली 1 रु.) में निवेशित किये। इस निवेश से किशनलाल की वार्षिक आय ज्ञात कीजिये।

4. फरीदा ने 88008 रु. 112 पर उपलब्ध 9½%स्टॉक (दलाली 2 रु.) में निवेशित किये। इस निवेश से फरीदा की वार्षिक आय ज्ञात कीजिये।

5. 75000 रु. का 95 पर उपलब्ध 10% स्टॉक खरीदने के लिये कितनी राशि का निवेश करना होगा।

6. 90000 का 110 पर उपलब्ध 8% स्टॉक खरीदने के लिये कितनी राशि का निवेश करना होगा?

7. 80 पर उपलब्ध 10½% स्टॉक (दलाली 2%) खरीदने के लिये कितनी राशि का निवेश किया जाए कि उस पर 4200 रु. की आय हो?

8. 90 पर उपलब्ध 7½% स्टॉक (दलाली 2%) खरीदने के लिये कितनी राशि का निवेश किया जाए कि उस पर कुल 7500 रु. की आय हो?

9. एक व्यक्ति ने 20000 रु. का 90 पर उपलब्ध 5% स्टॉक खरीदा तथा जब मूल्य बढ़कर 93¾ हो गया तो उसे बेच दिया। उसका लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

10. शैलजा ने 36000 रु. का 92 पर उपलब्ध 7½% स्टॉक खरीदा तथा जब मूल्य बढ़कर 93¾ हो गया तो उसे बेच दिया। उसका प्रतिशत लाभ ज्ञात कीजिये।

11. एक व्यक्ति 95 पर उपलब्ध 5% स्टॉक में 28500 रु. की एक राशि का निवेश करता है। जब मूल्य बढ़कर 98 रु. हो जाता है तो वह 15000 का स्टॉक बेच देता है तथा शेष स्टॉक का जब मूल्य बढ़कर 90 रु. हो जाता है तब बेच देता है। इस सौदे में उसे क्या लाभ या हानि हुई?

12. नारायण सिंह 99 पर उपलब्ध 5½% स्टॉक में 39600 रु. की एक राशि का निवेश करता है और जब मूल्य बढ़कर 102 रु. हो जाता है, तो 20000 रु. के स्टॉक को बेच देता है तथा शेष स्टॉक जब मूल्य गिरकर 95 रु. हो जाता तब उसे बेच देता है। इस सौदे में उसे क्या लाभ या हानि हुई?

13. राव 46500 रु. की राशि को 93 पर उपलब्ध 6% स्टॉक में निवेश करता है और जब इसके मूल्य बढ़कर 95 रु. हो जाता है, तब वह उसे बेच देता है। इस प्रकार उसे जो राशि प्राप्त होती है, उसे वह 95 पर उपलब्ध 9% स्टॉक में निवेश कर देता है, उसकी आय में अन्तर ज्ञात कीजिए।

14. सुषमा ने 245000 रु. 98 पर उपलब्ध 7% स्टॉक में निवेश किए और जब उसका मूल्य बढ़कर 100 रु. हो गया तब उसे बेच दिया। इस प्रकार जो धनराशि प्राप्त होती है वह उसे दूसरे स्टॉक, 125 पर उपलब्ध 9% स्टॉक में लगा देती है। सुषमा की आय में अन्तर ज्ञात कीजिये।

15. लता 90 पर उपलब्ध 8% स्टॉक में 32400 रु. की एक राशि निवेश करती है। जब स्टॉक का मूल्य बढ़कर 95 रु. हो जाता है, तब वह 18000 रु. का स्टॉक बेच देती है तथा शेष स्टॉक को 98 रु. में बेच देती है। इस प्रकार प्राप्त कुल धनराशि को 96½ पर उपलब्ध 10% स्टॉक में लगा देती है। लता की आय में अन्तर ज्ञात कीजिये।

16. कालीचरण ने 96 पर उपलब्ध 9% स्टॉक में 288000 रु. की एक राशि को लगाया। इसमें से 160000 रु. का स्टॉक उसने, जब मूल्य बढ़कर 99 रु. हो गया तब बेच दिया और शेष स्टॉक 102 रु. के भाव में बेच दिया। इस प्रकार प्राप्त कुल धनराशि को 120 पर उपलब्ध 12% स्टॉक में लगा दिया। कालीचरण की आय में अन्तर ज्ञात कीजिये।

17. एक व्यक्ति ने 99 पर उपलब्ध 5% स्टॉक में 50490 रु. की एक राशि को निवेशित किया और जब मूल्य बढ़कर 102 रु. हो गया तब उसे बेच दिया। इस प्रकार प्राप्त धनराशि को 96 पर उपलब्ध 8% स्टॉक में लगा दिया। उसकी आय में अन्तर ज्ञात कीजिये (दलाली 3 रु.)।

18. एक व्यक्ति ने 102 पर उपलब्ध 6% स्टॉक में 78000 रु. लगाये और जब उसका मूल्य बढ़कर 104 रु. हो गया तो उसे बेच दिया। इस प्रकार प्राप्त कुल धनराशि को उसने 123 पर उपलब्ध 8¾% स्टॉक में लगा दिया। व्यक्ति की आय में अन्तर ज्ञात कीजिये (दलाली 2 रु.)।

19. एक व्यक्ति ने 104 पर उपलब्ध 5% स्टॉक में 260000 रु. की एक राशि का निवेश किया और जब उसका मूल्य बढ़कर 125 रु. हो गया तब बेच दिया। इस प्रकार प्राप्त धनराशि को उसने 6% स्टॉक में लगा दिया। ऐसा करने पर उसकी आमदनी 2500 रु. बढ़ गई। उसने दूसरा स्टॉक किस भाव से खरीदा था?

20. रेनू ने 46080 रु. की एक राशि को स्टॉक खरीदने में लगाया, जिसमें से कुछ राशि 120 पर उपलब्ध 5% स्टॉक में तथा शेष को 96 पर उपलब्ध 6% स्टॉक में लगाया। यदि दोनों स्टॉकों से उसकी कुल आय 2400 रु. हो, तो दोनों स्टॉक में अलग अलग कितनी राशि लगाई?

21. जगमोहन ने 94640 रु. की एक राशि को स्टॉक खरीदने में लगाया जिसमें से कुछ राशि 91 पर उपलब्ध 5% स्टॉक में तथा शेष को 104 पर उपलब्ध 8% स्टॉक में लगाया। यदि दोनों स्टॉकों से उसकी कुल आय 6240 रु. हो, तो अलग अलग स्टॉक में उसने कितनी राशि निवेश की?

22. एक व्यक्ति ने 74844 रु. की एक राशि को स्टॉक खरीदने में लगाया। इसमें से उसने कुछ राशि 108 पर उपलब्ध 4½% स्टॉक में तथा शेष 99 पर उपलब्ध 5½% स्टॉक में लगाया। यदि उसे दोनों स्टॉकों से समान आय हुई हो, तो क्रमशः दोनों स्टॉकों में निवेशित राशियां ज्ञात कीजिए।

23. एक व्यक्ति ने 165528 रु. की एक राशि को स्टॉक खरीदने में लगाया। इसमें से कुछ राशि 88 पर उपलब्ध 5½% स्टॉक में तथा शेष राशि को 99 पर उपलब्ध 4½% स्टॉक में लगाया। यदि दोनों निवेशों से प्राप्त आय समान है, तो दोनों स्टॉकों में क्रमशः लगी राशियां ज्ञात कीजिए।

22.8 ऋणपत्र (Debentures)

कम्पनी अपने व्यवसाय के सुखद एवं सफल विकास को देखने हेतु उसके विस्तार की योजना बनाती है और अपने वर्तमान स्थिति में परिवर्तन करना चाहती है उसके लिये अधिक तथा अधिक समय तक चलने वाली पूँजी की व्यवस्था करनी पड़ सकती है। कम्पनी के लिये सदैव यह सम्भव भी नहीं है कि पुनः दूसरे शेयर जनता के बीच लाये, किन्तु कम्पनी कुछ समय के लिये शेयरधारकों अथवा जनता से, कुछ निश्चित ब्याज पर धन उधार ले सकती है। शेयर पूँजी की तरह कुल ऋण, को जो इस योजना के लिये आवश्यक है, समान मूल्य की इकाइयों में बाँटते हैं, जिन्हें ऋणपत्र कहते हैं। इसके पश्चात् कम्पनी जनता तथा शेयरधारकों को आमन्त्रित करती है कि वे कम्पनी को इन इकाईयों के रूप में धनराशि उधार दें। इसके बदले में कम्पनी उधार

देने वालों को ऋणपत्र का एक प्रमाणपत्र निर्गत करती है जिस पर उधार दिया गया धन, ब्याज की दर, समय तथा नियम परिनियम या शर्तें विस्तार से अंकित रहती है।

ऋणपत्र धारक केवल उधार देने वाले होंगे और कम्पनी द्वारा घोषित किसी प्रकार के लाभ तथा लाभांश के हकदार नहीं होंगे। फिर भी ऋणपत्र धारकों को निश्चित समय पर, निश्चित दर पर ब्याज मिलता रहेगा चाहे कम्पनी लाभ में अथवा हानि में चल रही हो।

शेयर की तरह ही ऋणपत्र भी बाजार में खरीदे अथवा बेचे जा सकते हैं। इसी करण, शेयरों की खरीद व बिक्री के संबध में जिस शब्दावली का प्रयोग किया जाता है उसी शब्दावली का प्रयोग ऋणपत्रों, को खरीद एंव बिक्री में भी किया जाता है। अतः हम ऋणपत्र प्रिमियम पर, ऋणपत्र बट्टे पर आदि का प्रयोग करते है। ऋणपत्र दलाली का परिकलन उसी प्रकार किया जाता है, जैसा कि शेयरों में होता है, जैसे शेयरों की होती थी।

आइये कुछ उदाहरण लेकर इनकी गणना विधि स्पष्ट करें।

उदाहरण 23 100 रु. के अंकित मूल्य वाले 6% ऋणपत्रों को जो बाजार में प्रत्येक 150 रु. पर उपलब्ध है, खरीदने पर किसी व्यक्ति को कितने प्रतिशत की आय होगी?

हल ऋणपत्र का बाजार मूल्य = 150 रु.

अतः 150 रु. पर आय = 6 रु.

इसलिये 100 रु. पर आय = $\frac{(6\times100)}{150}$ रु. = 4 रु.

अर्थात ऋणपत्र पर प्रतिशत आय 4% है।

उदाहरण 24 श्यामा के पास किसी कम्पनी के 500 शेयर हैं जिनमें से प्रत्येक का सममूल्य 10 रु. है तथा 500 ऋणपत्र हैं जिनमें से प्रत्येक का जिनका सममूल्य 100 रु. है। कम्पनी शेयर पर 8% लाभांश तथा ऋणपत्र पर 10% ब्याज देती है। श्यामा की कुल वार्षिक आय ज्ञात करें तथा उसके निवेश पर आय की प्रतिशत दर भी निकालें।

हल 500 शेयर पर वार्षिक लाभांश = $\frac{(500\times10\times8)}{100}$ रु. = 400 रु.

तथा 500 ऋणपत्र पर वार्षिक ब्याज = $\frac{(500\times100\times10)}{100}$ = 5000 रु.

अतः श्यामा की कुल वार्षिक आय = (5000 + 400) रु. = 5400 रु.

श्यामा का कुल निवेश = (500 × 10 + 500 × 100) रु. = 55000 रु.

अतः श्यामा की प्रतिशत आय $=\left(\frac{5400}{55000}\times 100\right)\%$

$$=\frac{108}{11}\% \text{ या } 9\frac{9}{11}\%.$$

उदाहरण 25 6% के ऋणपत्रों, जिनका अंकित मूल्य 80 रु. है तथा बाजार मूल्य 120 रु. है, पर प्रतिशत आय ज्ञात कीजिये।

हल 80 रु. के ऋणपत्र पर ब्याज $=\frac{(80\times 6)}{100}$ रु. $= 4.80$ रु.

चूँकि 120 रु. खर्च करने पर खरीददार द्वारा प्राप्त ब्याज = 4.80 रु.

अतः 100 पर ब्याज $=\left[\left(\frac{4.80}{120}\times 100\right)\right]$ रु. $= 4.00$ रु.

इसलिये प्रतिशत आय 4% है।

प्रश्नावली 22.3

1. एक खरीददार की प्रतिशत आय ज्ञात कीजिए जिसके पास 8% के ऋणपत्र हैं जिनका अंकित मूल्य 120 रु. तथा बाजार मूल्य 180 रु. है।
2. एक खरीददार की प्रतिशत आय ज्ञात कीजिए जिसके पास 15% के ऋणपत्र हैं जिनका अंकित मूल्य 105 रु. तथा बाजार मूल्य 150 रु. है।
3. एक खरीददार की प्रतिशत आय ज्ञात कीजिए जिसके पास 5% के ऋणपत्र हैं, जिनमें से प्रत्येक का अंकित मूल्य 95 रु. एवं बाजार में वह 125 रु. में उपलब्ध है।
4. 12% के ऋणपत्र पर, जिनका अंकित मूल्य 90 रु. है तथा जो बाजार में 120 रु. में उपलब्ध है, प्रतिशत आय ज्ञात कीजिए।
5. 10% के ऋणपत्र, जिनका सममूल्य 120 रु. है तथा जो बाजार में 150 रु. पर उपलब्ध हैं, पर आय–प्रतिशत ज्ञात कीजिए।
6. 9% के ऋणपत्र, जिनका सममूल्य 120 रु. है तथा वह बाजार में 160 रु. पर उपलब्ध है, पर आय–प्रतिशत ज्ञात कीजिए।
7. रामलाल के पास किसी कम्पनी के 800 शेयर हैं जिनमें से प्रत्येक का सममूल्य 50 रु. है तथा 600 ऋणपत्र हैं जिनमें से प्रत्येक का सममूल्य 100 रु. है। कम्पनी शेयरों पर 6% लाभांश तथा ऋणपत्रों पर 12% ब्याज देती है। रामलाल की कुल वार्षिक आय तथा निवेश पर प्राप्त लाभ की दर ज्ञात कीजिए।

8. कमला के पास किसी कम्पनी के 1600 शेयर हैं जिनमें से प्रत्येक का सममूल्य 10 रु. है तथा 300 ऋणपत्र हैं जिनमें से प्रत्येक का सममूल्य 100 रु. है। कम्पनी शेयरों पर वार्षिक 8% लाभांश तथा ऋणपत्रों पर 15% वार्षिक ब्याज देती है। कमला की कुल आय निकालिए तथा उसके निवेश पर प्राप्त लाभ की दर भी ज्ञात कीजिए।

9. अहमद के पास किसी कम्पनी के 1200 शेयर हैं जिनमें से प्रत्येक का सममूल्य 20 रु. है तथा 500 ऋणपत्र हैं जिनमें से प्रत्येक का सममूल्य 100 रु. है। कम्पनी शेयरों पर 8% वार्षिक लाभांश देती है तथा ऋणपत्रों पर 12% वार्षिक ब्याज देती है। अहमद की कुल वार्षिक आय ज्ञात कीजिए तथा निवेश पर प्राप्त लाभ की दर भी ज्ञात कीजिए।

विविध उदाहरण

उदाहरण 26 96 पर उपलब्ध 8% स्टॉक कितना बेचा जाये, कि उससे प्राप्त धनराशि को यदि 105 पर उपलब्ध 10% स्टॉक में निवेश करें तो वार्षिक आय में 144 रु. की वृद्धि हो?

हल माना कि x रु. का स्टॉक बेचा गया

इसलिये आय $= \dfrac{(x \times 8)}{100} = \dfrac{2x}{25}$ रु.

बिक्री से प्राप्त राशि $= \dfrac{(x \times 96)}{100} = \dfrac{24x}{25}$ रु.

अर्थात $\dfrac{24x}{25}$ रु. से दूसरा स्टॉक 105 पर उपलब्ध 10% स्टॉक खरीदा गया।

अतः द्वितीय स्टॉक पर आय $= \left[\dfrac{24 \times 10}{25 \times 105} x\right] = \dfrac{16x}{175}$ रु.

इसलिये आय में अन्तर $= \left[\dfrac{16x}{175} - \dfrac{2x}{25}\right] = \dfrac{2x}{175}$ रु.

इसलिये $\dfrac{2x}{175} = 144$

या $x = \dfrac{144 \times 75}{2} = 12600$

अर्थात 12600 रु. का 96 पर उपलब्ध 8 % स्टॉक बेचा जाना चाहिए।

उदाहरण 27 4% स्टॉक तथा 4½% स्टॉक में एक व्यक्ति बराबर–बराबर राशियां निवेश करता है, तथा उसे दोनों से बराबर–बराबर आय प्राप्त होती है। यदि 4% स्टॉक 4 रु. बट्टे पर है तो दूसरा स्टॉक ज्ञात कीजिए। यह दिया है कि प्रत्येक स्टॉक का सममूल्य 100 रु. है।

हल माना कि x रु. ही समान राशि है, जो दोनों स्टॉकों में अलग–अलग निवेशित है। चूंकि 4% स्टॉक 4 रु. बट्टे पर है, अतः उसका बाजार मूल्य 96 रु. हुआ।

अतः उस पर आय $= \dfrac{(x \times 4)}{96} = \dfrac{x}{24}$ रु. (1)

पुनः माना कि p रु. द्वितीय स्टॉक का बाजार मूल्य है।

अतः द्वितीय स्टॉक पर आय $= \left(\dfrac{x}{p} \times \dfrac{9}{2}\right) = \dfrac{9x}{2p}$ रु. (2)

यह दिया है कि (1) = (2), अतः

$$\frac{x}{24} = \frac{9x}{2p}, \text{ अर्थात } p = 108.$$

अतः दूसरा 108 पर उपलब्ध 4½ स्टॉक है।

उदाहरण 28 एक व्यक्ति के पास 30000 रु. का 4½% स्टॉक है। वह आधे को 98 रु. पर तथा शेष को 105 रु. पर बेच देता है। इस प्रकार प्राप्त पूरी धनराशि को वह 5½ पर उपलब्ध 5% स्टॉक में लगा देता है। यदि प्रत्येक स्टॉक का सममूल्य 100 रु. हो तो दूसरा स्टॉक, जो उसके पास है, उसकी राशि ज्ञात कीजिए तथा आय में अन्तर निकालिए।

हल प्रथम स्टॉक पर आय $= \dfrac{(30000 \times 9)}{100 \times 2}$ रु. = 1350 रु.

प्रथम अर्ध स्टॉक का विक्रय मूल्य $= \dfrac{(15000 \times 98)}{10}$ रु. = 14700 रु.

द्वितीय अर्ध स्टॉक का विक्रय मूल्य $= \left(\dfrac{15000 \times 105}{100}\right)$ रु. = 15750 रु.

अतः अब कुल प्राप्त धनराशि = (14700 + 15750) रु. = 30450 रु.

दूसरे नये स्टॉक का मूल्य $= \dfrac{(30450 \times 2 \times 100)}{203}$ रु.

= 30000 रु.

अतः दूसरे नये स्टॉक पर अर्थात 101½ पर उपलब्ध 5% स्टॉक पर आय

$= \dfrac{(30450 \times 5 \times 2)}{203}$ रु. = 1500 रु.

इसलिये आय में अन्तर = (1500 – 1350) रु. = 150 रु.

उदाहरण 29 एक व्यक्ति के पास एक कम्पनी के 50 शेयर हैं जिनमें से प्रत्येक का सममूल्य 600 रु. है। यह कम्पनी 5% वार्षिक दर से लाभांश देती है। जब शेयर का भाव बढ़कर 784 रु. हो जाता है, तब वह इन शेयरों को बेच देता है। इससे प्राप्त धनराशि के आधे भाग को वह 98 पर उपलब्ध 7% स्टॉक में तथा दूसरे आधे भाग को वह 8% ऋणपत्र में, जिनका अंकित मूल्य 100 रु. है, में निवेश करता है। उसकी आय में अन्तर ज्ञात कीजिए।

हल 50 शेयरों का कुल सम–मूल्य = (600×50) रु. = 30000 रु.

इन शेयरों पर लाभांश = $\left(30000\times\frac{5}{100}\right)$ रु. = 1500 रु.

50 शेयरों को 784 रु. बेचने प्राप्त कुल धनराशि = (784 × 50) रु. = 39200 रु.

चूँकि 39200 का आधा अर्थात 19600 रु. 98 पर उपलब्ध 7% स्टॉक में निवेशित है

अतः इस अर्ध भाग पर आय = $\left(19600\times\frac{8}{100}\right)$ रु. = 1400 रु.

धनराशि के शेष आधे भाग से ऋणपत्र खरीदे गये, जिसमें ब्याज दर 8% है।

अतः ऋणपत्रों पर ब्याज की राशि = $\left(19600\times\frac{8}{100}\right)$ रु. = 1568 रु.

इसलिये कुल आय = (1400 + 1568) रु. = 2968 रु.

अतः आय में अन्तर = (2968 –1500) रु. = 1468 रु.

उदाहरण 30 सुशीला ने 9299 रु. की एक राशि का कुछ भाग 93½ पर उपलब्ध 3% स्टॉक में तथा शेष को 102 पर उपलब्ध 4½ % स्टॉक में निवेश किया, जिससे उसको दूसरे स्टॉक पर पहले स्टॉक की तुलना में 168 रु. अधिक आय हुई। उसने प्रत्येक प्रकार के स्टॉक में कितनी–कितनी धनराशि लगाई?

हल माना कि 93½ पर उपलब्ध 3% स्टॉक में उसने x रु. की धनराशि लगाई।

102 पर उपलब्ध 4½ % स्टॉक में उसने $(9299 - x)$ रु. की धनराशि लगाई।

अतः (93½ पर उपलब्ध 3% स्टॉक पर आय = $\frac{(x\times3\times2)}{187}=\frac{6x}{187}$ रु.

पुनः 102 पर उपलब्ध 4½% स्टॉक पर आय = $\frac{[(9299-x)\times9]}{102\times2}=\frac{[83691-9x]}{204}$ रु.

प्रश्नानुसार

$$\left[\frac{83691-9x}{204}-\frac{6x}{187}\right]=168$$

या $$\frac{(83691-9x)\times11}{204\times11}-\frac{6\times12x}{187\times12}=168$$

या $$920601-99x-72x=168\times2244$$

या $$171x=920601-376992=543609$$

इस प्रकार $x=\dfrac{543609}{171}=3179$

इसलिये 93½ पर उपलब्ध 3% स्टॉक में लगाई राशि 3179 रु. है।

तथा 102 पर उपलब्ध 4½% स्टॉक में निवेश की राशि (9299 – 3179) रु. अर्थात 6120 रु. है।

उदाहरण 31 A ने 20500 रु. की एक धनराशि को 125 पर उपलब्ध 4% स्टॉक में तथा B ने 120 रु. वाले स्टॉक में 24600 रु. की धनराशि लगाई। यदि A की आय का B की आय में अनुपात 4 : 5 है तो B को किस दर पर वार्षिक लाभांश का भुगतान किया गया?

हल A की आय $=\left(20500\times\dfrac{4}{125}\right)$ रु. = 656 रु.

चूँकि A की आय का B की आय से अनुपात 4:5 है

इसलिये B की आय $=\left(656\times\dfrac{5}{4}\right)$रु. = 820 रु. (1)

माना कि B को 120 रु. वाले स्टॉक पर x % लाभांश दिया गया।

इसलिये B की आय $=\left(\dfrac{24600\times x}{120}\right)$ रु. (2)

(1) और (2) को बराबर रखने पर, हम पाते हैं

$$\frac{24600x}{120}=820$$

इसलिये $$x=\frac{820\times120}{24600}=4$$

अतः दूसरे स्टॉक पर भी लाभांश की दर 4% है।

उदाहरण 32 कौन सा निवेश अधिक लाभप्रद है?

120 पर उपलब्ध 6% स्टॉक या 95 पर उपलब्ध 5% स्टॉक।

हल माना कि प्रत्येक स्टॉक में निवेश 120×95 रु. है

अतः प्रथम स्टॉक अर्थात 120 पर उपलब्ध 6% स्टॉक पर आय $= \frac{(120 \times 95 \times 6)}{120}$ रु. $= 570$ रु.

95 पर उपलब्ध 5% स्टॉक पर आय $= \frac{(120 \times 95 \times 5)}{95}$ रु. $= 600$ रु.

चूँकि 600 रु. > 570 रु. अतः द्वितीय स्टॉक में निवेश अधिक लाभप्रद है।

उदाहरण 33 किसी कम्पनी के एक शेयर का समसमूल्य 100 रु. है, तथा इसका बाजार मूल्य 900 रु. है। श्याम ने उस कम्पनी के 120 शेयर खरीदे। यदि कम्पनी अपने शेयरों पर 60% का लाभांश घोषित करती है तो श्याम द्वारा प्राप्त कुल वार्षिक लाभांश ज्ञात कीजिए। उसे अपने निवेश पर कितने प्रतिशत लाभ होगा यदि वह दलाल को 3% कमीशन देता है।

हल एक शेयर का सममूल्य = 100 रु.

इसलिये 120 शेयरों का सममूल्य = (120×100) रु. = 12000 रु.

अतः श्याम द्वारा प्राप्त लाभांश $= \left(12000 \times \frac{60}{100}\right)$ रु. $= 7200$ रु.

एक शेयर का बाजार मूल्य = 900 रु.

एक शेयर पर कमीशन = 900 रु. का 3% = 27 रु.

इसलिये एक शेयर का विक्रय मूल्य = $(900 + 27)$ रु. = 927 रु.

अतः वह धनराशि जो 120 शेयरों को खरीदने के लिये आवश्यक होगी

$= (927 \times 120)$ रु. = 111240 रु.

इसलिये 111240 रु. निवेशित करने पर श्याम को 7200 रु. का लाभ प्राप्त होता है।

अतः निवेश पर प्रतिशत लाभ $= \frac{7200}{111240} \times 100$

$$= \frac{2000}{309} = 6.46$$

अध्याय 22 पर विविध प्रश्नावली

1. 105 पर उपलब्ध 5% स्टॉक कितना बेचा जाये कि उससे प्राप्त राशि को 120 पर उपलब्ध 6% स्टॉक में लगाने पर वार्षिक आय में 50 रु. की वृद्धि हो ?

2. 84 रु. पर उपलब्ध 6% स्टॉक को कितना बेचा जाये, कि उससे प्राप्त राशि को 96 पर उपलब्ध 8% स्टॉक में निवेश करने पर वार्षिक आय में 280 रु. की वृद्धि हो।

3. एक व्यक्ति 5% और 6% स्टॉक में बराबर–बराबर धनराशि लगाता है और उसे दोनों से बराबर बराबर आय प्राप्त होती है। यदि 5% का स्टॉक 5 रु. बट्टे पर हो, तो दूसरे स्टाक किस प्रकार का है जबकि दोनों प्रकार के स्टॉको का सममूल्य 100 रु. हो?

4. आशा ने बराबर–बराबर राशि 4% और 5% स्टॉकों में लगाई तथा दोनों से बराबर–बराबर आय हुई। यदि 4% स्टॉक 4 रु. बट्टे पर हो तो दूसरा स्टॉक किस प्रकार का है यदि दोनों प्रकार के स्टॉकों का सममूल्य 100 रु. हो?

5. एक व्यक्ति के पास का 40000 रु. 6% स्टॉक है। वह इसके आधे भाग को 102 रु. पर तथा दूसरे आधे भाग को 105 रु. पर बेचता है। इस प्रकार प्राप्त धनराशि को वह 103½ पर उपलब्ध 6½% स्टॉक में लगा देता है। यदि प्रत्येक प्रकार के स्टॉक का सममूल्य 100 रु. हो, तो उसके पास अब कितना स्टॉक है और उसकी आय में अन्तर भी ज्ञात कीजिए।

6. एक व्यक्ति के पास किसी कम्पनी के 60 शेयर हैं जिनमें से प्रत्येक का सममूल्य 500 रु. है और उन पर उसको 8% वार्षिक लाभांश मिलता है। जब शेयर का मूल्य बढ़कर 600 रु. हो जाता है तो वह उनको बेच देता है। उस प्राप्त धनराशि के आधे भाग को वह 120 रु. पर उपलब्ध 8% स्टॉक में लगा देता है तथा शेष आधे भाग को 10% ऋणपत्रों, जिनमें से प्रत्येक का सममूल्य 100 रु. है, में लगा देता है। उसकी आय में अन्तर ज्ञात कीजिए।

7. रामनाथ ने 27600रु. की एक राशि का कुछ भाग 96 पर उपलब्ध 4% स्टॉक में तथा शेष को 103½ में उपलब्ध 4½% स्टॉक में इस प्रकार लगाया कि पहले वाले स्टॉक में दूसरे वाले से 260 रु. अधिक आय हुई। ज्ञात कीजिए कि प्रत्येक प्रकार के स्टॉक में उसने कितनी–कितनी राशि लगाई?

8. कौन सा निवेश अधिक लाभप्रद है

(i) 120 पर उपलब्ध 6% स्टॉक अथवा 98 पर उपलब्ध 5% स्टॉक ?

(ii) 105 पर उपलब्ध 5% स्टॉक अथवा 84 पर उपलब्ध 4% स्टॉक ?

(iii) 124 पर उपलब्ध 6½% स्टॉक अथवा 95 पर उपलब्ध 5% स्टॉक?

(iv) 120 पर उपलब्ध 4% स्टॉक अथवा 122 पर उपलब्ध 4½% स्टॉक ?

9. किसी इलैक्ट्रॉनिक कम्पनी के 100 रु. सममूल्य वाले शेयर का बाजार मूल्य 1200 रु. है। नमिता ने कम्पनी के 100 शेयर खरीदें। यदि कम्पनी अपने शेयर पर 50% लाभांश घोषित करती है तो नमिता को कुल कितना लाभांश मिला? ज्ञात कीजिए कि उसको अपने निवेश पर कितना प्रतिशत लाभ मिला यदि वह दलाल को 5% कमीशन देती है?

10. राम 125 पर उपलब्ध 4½% स्टॉक में 20000 रु. लगाता है जबकि श्याम 120 रु. वाले दूसरे स्टॉक में 24000 रु. लगाता है। यदि राम की आय का श्याम की आय में अनुपात 9:14 है तो श्याम को वार्षिक लाभांश किस दर से दिया गया?

औसत तथा विभाजनमान

अध्याय 23

(AVERAGE AND PARTITION VALUES)

23.1 भूमिका

स्मरण कीजिये, पिछले अध्याय में हमने सांख्यिकीय परीक्षण में पाया था कि एकत्रित आँकड़े यथा प्राप्त रूप में होते हैं। कभी–कभी ये आँकड़े इतनी अधिक संख्या में होते हैं कि बिना इनको संसाधित (Processing) किये इनके गुणदोष के विषय में तथा उनसे जनसंख्या अध्ययन के अंतर्गत प्रतिदर्श के विषय में कुछ वांछित परिणाम निकालना कठिन होता है। इस कार्य का मुख्य उद्देश्य किसी एक मान या मानों को ज्ञात करना है, जो आँकड़ों की विशिष्टताओं को स्पष्ट कर सके। ऐसे मानों को माध्य (औसत) या केन्द्रीय प्रवृत्ति का मापक कहते हैं।

23.2 माध्यों के प्रकार (Types of Averages)

माध्यों के या केन्द्रीय प्रवृति के मापक के प्रमुख प्रकार निम्न हैं।

— समान्तर माध्य

— गुणोत्तर माध्य

— बहुलक

— विभाजन मान [माध्यिका, चतुर्थक, दशमक तथा शतमक].

पिछली कक्षाओं में हम समान्तर माध्य का विशद अध्ययन किया है, साथ ही असंसाधित आँकड़ों की माध्यिका तथा बहुलक का भी अध्ययन किया है। इस अध्ययन में प्रथमतः विभाजन मानों का विस्तारपूर्वक अध्ययन करके फिर बहुलक का अध्ययन करेंगे।

23.3 विभाजन मान (Partition Values)

यदि आँकड़ों के समूह को कई बराबर भागों में बाँटा जाए तो प्रत्येक विभाजन पर पड़ने वाले प्रेक्षण को हम विभाजन मान कहते हैं। स्मरण कीजिये कि माध्यिका भी केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप है जो आँकड़ों के समूह को दो बराबर भागों में विभक्त करती है। अतः माध्यिका को एक विशेष

विभाजन मान के रूप में लिया जाता है। इसी प्रकार चतुर्थक पूरे आँकड़ों के समूह को चार बराबर भागों में विभक्त करता है, दशमक पूरे आँकड़ों के समूह को दस समान भागों में विभक्त करता है, और शतमक पूरे आँकड़ों के समूह को सौ समान भागों में विभक्त करता है। हम इन सभी विभाजन मानों का विस्तारपूर्वक अध्ययन इस अनुभाग में करेंगे।

23.3.1 *माध्यिका* जैसा कि ऊपर कहा गया है कि आँकड़ों की एक श्रेणी की माध्यिका, वह मान है जो सम्पूर्ण श्रेणी को दो समान भागों में विभक्त करती है। यहाँ हम यथा प्राप्त, संसाधित तथा असंसाधित आँकड़ों की माध्यिका के परिकलन की विधियाँ अलग–अलग सीखेंगे।

23.3.2 *यथा प्राप्त अथवा असंसाधित आँकड़ों की माध्यिका* इसे ज्ञात करने के लिये निम्न क्रियाओं पर ध्यान दीजिये।

(i) आँकड़ों के समूह को आरोही या अवरोही क्रम में रखिये।

(ii) यदि समूह के आँकड़ों की संख्या n हो तो

(a) जब n विषम हो तो $\frac{n+1}{2}$ वाँ प्रेक्षण इसकी माध्यिका है।

(b) जब n सम हो तो $\frac{n}{2}$ वें तथा $\left(\frac{n}{2}+1\right)$वें पद का माध्य इसकी माध्यिका है।

आइये इसे स्पष्ट करने के लिये कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1 निम्नलिखित आँकड़ों की माध्यिका ज्ञात कीजिए :

(i) 5,19,14,6,8,9,12,13,21

(ii) 31,16,19,25,14,13,12,4,28,45

हल (i) आँकड़ों को आरोही क्रम में रखने पर हम पाते हैः

5,6,8,9,12,13,14,19,21

यहाँ $n = 9$ (विषम है,)

$\therefore$ अतः माध्यिका $\left(\frac{9+1}{2}\right)$वाँ अथवा 5वाँ प्रेक्षण है, जो 12 है।

अतः माध्यिका = 12

(ii) इसमें आँकड़ों को आरोही क्रम में रखने पर, हम पाते हैंः

4,12,13,14,16,19,25,28,31,45

यहाँ $n = 10$ (सम है)

$\therefore$ अतः माध्यिका $\left(\frac{10}{2}\right)$वें तथा $\left(\frac{10}{2}+1\right)$वें पदों का माध्य है, अर्थात 5वें तथा 6वें प्रेक्षणों का माध्य जो $\frac{16+19}{2} = 17.5$

अतः माध्यिका = 17.5

23.3.3 ***संसाधित आँकड़ों से माध्यिका ज्ञात करना*** इसकी दो स्थितियाँ हैं।

स्थिति (i) जब आँकड़े खण्डित हों तो निम्न चरण अपनायेंगे

1. दिये गये आँकड़ों एंव उनकी बारम्बारता को आरोही अथवा अवरोही क्रम में रखिए।
2. संचयी बारम्बारता का एक अलग स्तम्भ (कालम) बनायें।
3. (i) यदि बारम्बारता का योग n, विषम है तो $\frac{n+1}{2}$वाँ प्रेक्षण ही माध्यिका है।

   (ii) यदि बारम्बारता का योग n, सम है तो $\frac{n}{2}$वें तथा$\left(\frac{n}{2}+1\right)$वें प्रेक्षणों का माध्य ही इच्छित माध्यिका है।

स्थिति (ii) जब आँकड़े सतत् तथा बारम्बारता वितरण के रूप में हों तो माध्यिका को निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है:

$$\text{माध्यिका} = l_{med} + \frac{\frac{n}{2} - Cf_{-1}}{f_{med}} \times i,$$

जबकि (i) l_{med} इस वर्ग की वह निम्न सीमा है जिसमें माध्यिका अवस्थित है

(ii) f_{med} माध्यिका वर्ग की बारम्बारता है

(iii) Cf_{-1} इस वर्ग की संचयी बारम्बारता है जो माध्यिका वर्ग के तुरंत पहले आता है

(iv) n बारम्बारता का योग है, तथा

(v) i वर्ग अन्तराल की लम्बाई है (या वर्गमाप)।

आइये माध्यिका का परिकलन कुछ उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करें।

उदाहरण 2 एक फैक्ट्री के 100 कर्मचारियों की दैनिक मजदूरी (रुपयों में) निम्नलिखित है :

दैनिक मजदूरी (रु. में) :	125	130	135	140	145	150	160	180
मजदूरों की संख्या :	6	20	24	28	15	4	2	1

उपर्युक्त आँकड़ों से एक मजदूर की माध्यिका मजदूरी ज्ञात कीजिये।

हल हम दिये गये आँकड़ों से निम्न सारणी बनाते हैं:

मजदूरी (x_i) (रु. में)	**मजदूरों की संख्या (f_i)**	**संचयी बारम्बारता**
125	6	6
130	20	26
135	24	50
140	28	78
145	15	93
150	4	97
160	2	99
180	1	100
योग	100	

यहाँ मजदूरी को पहले से ही आरोही क्रम में रखा हुआ है तथा हमने संचयी बारम्बारता का एक स्तम्भ (कॉलम) बना लिया है और n यहाँ 100 है जो सम है।

इसलिये माध्यिका $\left(\frac{100}{2}\right)$वें तथा $\left(\frac{100}{2}+1\right)$वें प्रेक्षण का माध्य अर्थात 50 वें तथा 51 वें प्रेक्षणों का माध्य है, अर्थात 135 एंव 140 का माध्य होगा।

$$\text{अभीष्ट माध्यिका} = \frac{135+140}{2} = 137.50$$

अत: फैक्ट्री के एक कर्मचारी की माध्यिका मजदूरी 137.50 रुपये है।

उदाहरण 3 निम्न आँकड़ों की माध्यिका ज्ञात कीजिये :

वर्ग अन्तराल :	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
बारम्बारता :	4	5	6	9	11	12	8	5

हल हम उपर्युक्त आँकड़ों से निम्न सारणी बनाते हैं, जो परिकलन के चरण दर्शाता है

वर्गअन्तराल	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता	
20-30	4	4	
30-40	5	9	
40-50	6	15	
50-60	9	24	
60-70	11	35	← माध्यिका वर्ग
70-80	12	47	
80-90	8	55	
90-100	5	60	

$$n = \sum f = 60$$

यहाँ $\frac{n}{2} = \frac{60}{2}$ या 30

इसलिये 60–70 माध्यिका वर्ग है।

इसलिये $\ell_{med} = 60,\ f_{med} = 11, Cf_{-1} = 24, i = 10$

इसलिये माध्यिका $= 60 + \frac{30-24}{11} \times 10 = 65.45$

उदाहरण 4 निम्न आँकड़ों के लिए माध्यिका ज्ञात कीजिये।

वर्ग अन्तराल :	110-119	120-129	130-139	140-149	150-159	160-169	170-179
बारम्बारता :	5	25	40	60	40	25	5

हल माध्यिका ज्ञात करने के लिये हमें वर्ग अन्तरालों को सतत् बनाना पड़ेगा (ऐसा हम माध्य परिकलन के लिये पिछली कक्षा में कर चुके हैं) उसी विधि को अपनाते हुए उपर्युक्त आँकड़ों से एक सारणी बनाते हैं तथा संचयी बारम्बारता का एक स्तम्भ (कॉलम) लेते हैं। अतः

वर्गअन्तराल	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता
109.5-119.5	5	5
119.5-129.5	25	30
129.5-139.5	40	70

139.5-149.5	60	130	← माध्यिका वर्ग
149.5-159.5	40	170	
159.5-169.5	25	195	
169.5-179.5	5	200	

यहाँ $n = \sum f = 200$

इसलिये $\frac{n}{2} = 100.$

इसलिये माध्यिका वर्ग $= 139.5-149.5$

$$\ell_{\text{med}} = 139.5,\ f_{\text{med}} = 60;\ Cf_{-1} = 70,\ i = 10$$

इसलिये माध्यिका $= 139.5 + \frac{100-70}{60} \times 10 = 144.5$

उदाहरण 5 निम्न आँकड़ों से माध्यिका ज्ञात करें :

प्राप्तांक	**छात्रों की संख्या**
20 से कम	0
30 से कम	4
40 से कम	16
50 से कम	30
60 से कम	46
70 से कम	66
80 से कम	82
90 से कम	92
100 से कम	100

हल उपर्युक्त आँकड़ों से पहले हम बारम्बारता सारणी बनाते हैं तथा फिर उसमें संचयी बारम्बारता का एक स्तम्भ भी जोड़ देते हैं, जैसा कि नीचे दिया गया है।

वर्गअन्तराल	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता	
20-30	4	4	
30-40	12	16	
40-50	14	30	
50-60	16	46	
60-70	20	66	← माध्यिका वर्ग
70-80	16	82	
80-90	10	92	
90-100	8	100	

यहाँ $n = \sum f = 100$

इसलिये $\frac{n}{2} = 50$

इसलिये माध्यिका वर्ग $= 60 - 70$

$\ell_{\text{med}} = 60;\ f_{\text{med}} = 20,\ Cf_{-1} = 46,\ i = 10$

इसलिये माध्यिका $= 60 + \frac{50-46}{20} \times 10$

$= 62$

उदाहरण 6 यदि निम्न आँकड़ों की माध्यिका 28.5 है तो x तथा y का मान ज्ञात कीजिये।

वर्ग अन्तराल :	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	योग
बारम्बारता :	5	x	20	15	y	5	60

हल दिये गए आँकड़ों से एक सारणी बनाने पर हम पाते हैं

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता
0-10	5	5
10-20	x	$5+x$
20-30	20	$25+x$
30-40	15	$40+x$
40-50	y	$40+x+y$
50-60	5	$45+x+y$
	योग 60	

यह दिया गया है कि $n = 60$

इसलिए $45 + x + y = 60$, इससे प्राप्त होता है $x + y = 15$

चूँकि माध्यिका 28.5 वर्ग अन्तराल 20 – 30 में स्थित है।

इसलिए $l_{med} = 20,\ f_{med} = 20,\ Cf_{-1} = 5 + x,\ i = 10$

अतः $$28.5 = 20 + \frac{30 - 5 - x}{20} \times 10$$

$$= 20 + \frac{25 - x}{2}$$

जिससे हम प्राप्त करते हैं $x = 8$.

इसलिए $y = 7$

प्रश्नावली 23.1

1. निम्न आँकड़ों के लिए माध्यिका ज्ञात कीजिए।

(i) 25,14,11,26,18,17,40,29,19,20,13

(ii) 35,31,12,16,29,74,45,40,49,57,62

(iii) 111,129,143,118,120,125,170,162

(iv) 29,34,11,17,36,21,46,23,39,41

(v) 205,170,131,174,153,142,147,157,196,148

2. भवन निर्माण से संबन्धित निम्न आंकड़ों से मजदूर की माध्यिका मजदूरी ज्ञात कीजिए :

मजदूरी (रुपये में)	3500	3800	4100	4500	5500	6500	7000
मजदूरों की संख्या	12	13	25	17	15	12	6

3. निम्न आँकड़ों के लिए माध्यिका ज्ञात कीजिए :

प्राप्तांक (20 में से)	5	9	10	12	13	16	18	20
छात्रों की संख्या	4	5	6	12	11	6	4	2

4. 100 दिनों तक विद्यालय में छात्रों की अनुपस्थिति के आँकडे निम्न है :

अनुपस्थित छात्रों की संख्या	5	6	7	8	9	10	11	12	13
दिनों की संख्या	12	14	16	25	9	8	7	5	4

प्रतिदिन अनुपस्थित छात्रों की माध्यिका ज्ञात कीजिये।

5. निम्न आँकड़ों के आधार पर प्रति जोड़े माता–पिता के बच्चों की संख्या की माध्यिका ज्ञात कीजिये।

बच्चों की संख्या	:	कोई नहीं	1	2	3	4	5
जोड़े माता पिता की संख्या	:	20	75	60	35	8	2

6. निम्न वितरण से अंकों की माध्यिका कीजिए :

वर्ग अन्तराल	:	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
छात्रों की संख्या	:	2	12	22	8	6

7. निम्न आँकड़ों के अधार पर माध्यिका ज्ञात कीजिए :

(i)

वर्ग अन्तराल	:	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120	120-140	140-160
बारम्बारता	:	12	15	23	18	12	12	8

(ii)

वर्ग अन्तराल	:	130-140	140-150	150-160	160-170	170-180	180-190	190-200
बारम्बारता	:	5	9	17	28	24	10	7

(iii)

प्रतिदिन खर्च (रु) में	:	50-100	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350	350-400
दिनों की संख्या	:	12	15	18	25	15	9	6

8. दिये हुए निम्न आँकड़ों से प्रत्येक के लिये माध्यिका ज्ञात कीजिये :

(i)

वर्ग अन्तराल	:	130-139	140-149	150-159	160-169	170-179	180-189	190-199
बारम्बारता	:	4	9	18	28	24	10	7

(ii)

वर्ग अन्तराल	:	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79
बारम्बारता	:	2	4	8	9	4	2	1

(iii)

वर्ग अन्तराल	:	100-149	150-199	200-249	250-299	300-349	350-399
बारम्बारता	:	5	12	18	8	4	3

(iv)

प्राप्तांक	**बारम्बारता**
10 से कम	0
30 से कम	10
50 से कम	25
70 से कम	43
90 से कम	65
110 से कम	87
130 से कम	96
150 से कम	100

(v)

मजदूरी (रुपयों में)	मजदूरों की संख्या
150 से अधिक	शून्य
140 से अधिक	12
130 से अधिक	27
120 से अधिक	60
110 से अधिक	105
100 से अधिक	124
90 से अधिक	141
80 से अधिक	150

9. निम्न आँकड़ों की माध्यिका 32.5 है, तो x तथा y के मान ज्ञात कीजिए।

वर्ग अन्तराल :	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	योग
बारम्बारता :	x	5	9	12	y	3	2	40

10. निम्न आँकड़ों की माध्यिका 525 तथा बारम्बारता का कुल योग 100 है।

वर्ग अन्तराल :	0-100	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800	800-900	900-1000
बारम्बारता :	2	5	x	12	17	20	y	9	7	4

x और y का मान ज्ञात कीजिये।

23.4 विभाजन मान, चतुर्थक, दशमक तथा शतमक की गणना

उपयुर्क्त मानों की गणना हम माध्यिका की तरह ही करेंगें, केवल इतना ही परिर्वत्तन करना पड़ेगा कि चतुर्थक, दशमक तथा शतमक ज्ञात करने के लिये माध्यिका के सूत्र में केवल सीमान्त परिवर्त्तन करना पड़ेगा।

हम जानते हैं कि चतुर्थक, दशमक तथा शतमक पूरी श्रेणी को 4, 10 तथा100 समान भागों में विभाजित करते हैं। Q_1, Q_2 तथा Q_3 को क्रमशः प्रथम, द्वितीय एंव तृतीय चतुर्थक कहते हैं। Q_1 को निम्न तथा Q_3 को उच्च्च चतुर्थक भी कहा जाता है।

इसी प्रकार नौ दशमक $D_1, D_2, ..., D_9$ होते हैं तथा 99 शतमक $P_1, P_2, P_3, ... , P_{99}$ होते हैं। फिर भी Q_2, D_5 और P_{50} माध्यिका जैसे हैं।

यहाँ ध्यान देने वाली बात यह है कि विभाजनमान की स्थिति में [Q_r, D_r तथा P_r] केवल आँकड़ों को आरोही क्रम में ही लिखना पड़ता है, जबकि माध्यिका ज्ञात करने की स्थिति में आँकड़ों को मात्रा के अनुसार आरोही अथवा अवरोही क्रम में लिखा जाता है। चतुर्थक, दशमक तथा शतमक के सूत्र के लिये यथा प्राप्त अथवा अवर्गीकृत आँकड़ों के लिये निम्न विधि अपनाते हैं।

Q_r (r वाँ चतुर्थक) = $\frac{r(n+1)}{4}$ वें प्रेक्षण का मान जहाँ $r = 1,2,3$

D_r (r वाँ दशमक) = $\frac{r(n+1)}{10}$ वें प्रेक्षण का मान जहाँ $r = 1,2,3,...,9$

P_r (r वाँ शतमक) = $\frac{r(n+1)}{100}$ वें प्रेक्षण का मान जहाँ $r = 1,2,3,..,99$

यहाँ पर एक आवश्यक ध्यान देने योग्य बात है कि यदि $\frac{r(n+1)}{4}, \frac{r(n+1)}{10}$ तथा $\frac{r(n+1)}{100}$ एक भिन्न के रूप में आता है जैसे 9.2 है तो 9वें तथा 10वें प्रेक्षण का औसत सही विभाजन मान होगा।

वर्गीकृत आँकड़ों की स्थिति में जबकि वे सतत् हैं निम्न संगत सूत्र होंगे :

$$Q_r = l_{quart} + \frac{\left(\frac{rn}{4} - Cf_{-1}\right)}{f_{quart}} \times i \qquad [r = 1, 2, 3]$$

$$D_r = l_{dec} + \frac{\left(\frac{rn}{10} - Cf_{-1}\right)}{f_{dec}} \times i \qquad [r = 1, 2, ..., 9]$$

तथा $$P_r = l_{per} + \frac{\left(\frac{rn}{100} - Cf_{-1}\right)}{f_{per}} \times i, \qquad [r = 1, 2, 3, ---, 99]$$

जबकि l_{quart}, l_{dec} तथा l_{per} क्रमशः निम्न वर्ग की सीमाएं हैं जिसमें चतुर्थक, दशमक तथा शतमक क्रमशः अवस्थित रहते हैं।

Cf_{-1} चतुर्थक, दशमक तथा शतमत वर्ग अन्तराल से पहले वर्ग अन्तराल की संचयी बारम्बारता है। एंव f_{quart}, f_{dec} तथा f_{per} उस प्रेक्षण की बारम्बारता है जिसमें r वाँ चतुर्थक,

r वाँ दशमक, तथा r वाँ शतमक, अवस्थित रहतें हैं, n कुल प्रेक्षणों का योग तथा i वर्गअन्तराल की लम्बाई है।

आइये कुछ उदाहरण को लेकर हम विभाजनमान की गणना करते हैं।

उदाहरण 7 निम्न आँकड़ों से तीसरा चतुर्थक, छठा दशमक तथा सत्तरवाँ शतमक का मान निकालिए :

28,17,12,25,26,19,13,27,21,16

हल आँकड़ों को आरोही क्रम में लिखने पर निम्न मिलता है :

12, 13, 16, 17, 19, 21, 25, 26, 27, 28

यहाँ $n = 10.$

इसलिए $Q_3 = \frac{3}{4}(10+1)$वाँ प्रेक्षण (या 8.25वाँ प्रेक्षण)

अतः $Q_3 =$ 8वें तथा 9वें प्रेक्षण का माध्य

$= \frac{26+27}{2} = 26.5$

इसी प्रकार $D_6 = [\frac{6}{10}(11)]$वाँ प्रेक्षण

= 6वें तथा 7वें प्रेक्षण का माध्य

$= \frac{21+25}{2} = 23$

तथा $P_{70} = [\frac{70}{100}(11)]$वाँ प्रेक्षण

= 7वें तथा 8वें प्रेक्षण का माध्य

$= 25.5$

उदाहरण 8 निम्न आँकड़ों से Q_1, Q_3, D_6 तथा P_{45} ज्ञात कीजिये :

x_i	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
f_i	15	18	25	27	40	25	19	16	8	7

हल यहाँ आँकड़ों को आरोही क्रम में रखने पर हम निम्न सारणी तैयार करते हैं :

x_i	f_i	संचयी बारम्बारता	
18	15	15	
19	18	33	
20	25	58	$\leftarrow Q_1$
21	27	85	
22	40	125	$\leftarrow D_6, P_{45}$
23	25	150	
24	19	169	$\leftarrow Q_3$
25	16	185	
26	8	193	
27	7	200	
	$n = 200$		

यहाँ $n = 200$, अतः $\frac{n+1}{4} = 50.25$

इसलिये $Q_1 = 20$

पुनः $\frac{3(n+1)}{4} = \frac{3}{4} \times 201 = 150.75$

इसलिये $Q_3 = 24$

पुनः $\frac{6(n+1)}{10} = \frac{6}{10} \times 201 = 120.6$

इसलिये $D_6 = 22$

अन्ततः $\frac{45}{100}(n+1) = \frac{45}{100} \times 201 = 90.45$

इसलिये $P_{45} = 22$

उदाहरण 9 निम्न आँकड़ों से प्रथम एंव तृतीय चतुर्थक, तृतीय दशमक तथा 47 वाँ शतमक ज्ञात कीजिये :

वर्गअन्तराल	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
बारम्बारता	8	12	20	25	15	9	6	5

हल हम निम्न सारणी तैयार करते हैं :

वर्गअन्तराल	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता	
10-20	8	8	
20-30	12	20	
30-40	20	40	$\leftarrow Q_1, D_3$
40-50	25	65	$\leftarrow P_{47}$
50-60	15	80	$\leftarrow Q_3$
60-70	9	89	
70-80	6	95	
80-90	5	100	
	$n = 100$		

यहाँ $n = 100$

इसलिये $\frac{n}{4} = 25$

अतः Q_1, 30-40 वर्ग अन्तराल में अवस्थित है।

इसलिए $Q_1 = 30 + \frac{25-20}{20} \times 10 = 32.5$

पुनः $\frac{3n}{4} = 75$

इसलिये Q_3, 50-60 वर्ग अन्तराल में अवस्थित है।

$$Q_3 = 50 + \frac{75-65}{15} \times 10 = 50 + 6.67 = 56.67$$

पुनः $\frac{3n}{10} = 30$, अर्थात D_3 वर्ग अन्तराल 30-40 में अवस्थित है।

इसलिए $D_3 = 30 + \frac{30-20}{20} \times 10 = 35$

अन्ततः $\frac{47n}{100} = 47$, अर्थात P_{47} वर्ग अन्तराल 40-50 में अवस्थित है।

इसलिये $P_{47} = 40 + \frac{47-40}{25} \times 10 = 42.8$

उदाहरण 10 निम्न आँकड़े 50 छात्रों द्वारा एक कक्षा–परीक्षण में प्राप्त किये गए अंक हैं।

प्राप्तांक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
छात्रों की संख्या	3	5	9	12	18	3

यदि परीक्षण में 70% छात्र सफल होते हैं तो छात्रों को परीक्षा में सफल होने के लिये कितने न्यूनतम अंक प्राप्त करना आवश्यक है?

हल चूँकि 70% छात्र सफल घोषित हैं अतः 30% छात्र परीक्षा में असफल हैं। अतः सफल छात्रों को P_{30} से अधिक प्राप्त करना आवश्यक होगा। प्रथमतः हम P_{30} ज्ञात करेंगे।

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता	
0-10	3	3	
10-20	5	8	
20-30	9	17	$\rightarrow P_{30}$
30-40	12	29	
40-50	18	47	
50-60	3	50	
	$n = 50$		

$$\frac{30n}{100} = 15$$

इसलिये P_{30} वर्ग अन्तराल 20-30 में अवस्थित है।

$$P_{30} = 20 + \frac{15-8}{9} \times 10 = 27.7$$

अतः परीक्षा में सफल होने के लिये न्यूनतम प्राप्तांक 28 है।

उदाहरण 11 निम्न आँकड़ों से मजदूरों का प्रतिशत ज्ञात कीजिए जिनकी आय 10200 रुपये से अधिक है।

आय (रुपयों में)	7000-8000	8000-9000	9000-10000	10000-11000	11000-12000
मजदूरों की संख्या:	4	8	9	6	3

हल माना कि $x\%$ मजदूर 10200 रुपये मजदूरी पाते हैं

अतः $P_x = 10200$ रुपये, $n = 30, i = 1000$

आँकड़ों को निम्न सारणी के रूप में रखने पर,

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता	
7000-8000	4	4	
8000-9000	8	12	
9000-10000	9	21	
10000-11000	6	27	$\leftarrow P_x$
11000-12000	3	30	

अर्थात P_x वर्ग अन्तराल $10000 - 11000$ में अवस्थित है

अत: $$10200 = 10000 + \frac{\frac{30 \times x}{100} - 21}{6} \times 1000$$

या $200 \times 6 = 300\,x - 21000$

या $300\,x = 22200$

या $x = 74$

इसलिये 74% मजदूर 10200 रुपये तक : 26% मजदूर 10200 रुपये से अधिक कमाते हैं।

प्रश्नावली 23.2

1. निम्न आँकड़ों से Q_1, Q_3, D_3, D_6 तथा D_8 ज्ञात कीजिये।

14, 7, 13, 12, 13, 17, 8, 10, 6, 15, 18, 21, 20

2. किसी कक्षा–परीक्षा में कुल 30 अंक रखे गये जिसमें 12 छात्रों का प्राप्तांक निम्न है :

18, 20, 9, 15, 21, 26, 14, 13, 27, 22, 16, 28

तो D_7 तथा P_{33} ज्ञात कीजिये।

3. निम्न आँकड़ों से Q_3 तथा D_5 ज्ञात कीजिये।

x_i	:	5	4	9	12	15	6	10
f_i	:	8	6	12	8	6	9	10

4. निम्न आँकड़ों से Q_1, Q_3, D_6 तथा P_{70} ज्ञात कीजिये।

x_i	:	10	12	14	16	18	20	24	26
f_i	:	4	8	10	13	11	10	7	7

5. किसी प्रवेश–परीक्षा में 60 छात्रों द्वारा प्राप्तांक निम्न हैं।

प्राप्तांक	25	12	26	18	20	24	28	15
छात्रों की संख्या	6	3	4	12	14	14	2	5

ज्ञात कीजिये कि कितने प्रतिशत छात्रों ने 25 अंक से अधिक अंक प्राप्त किये।

6. निम्न आँकड़ों से निम्न तथा उच्च चतुर्थक ज्ञात कीजिये।

वर्ग अन्तराल	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
बारम्बारता	14	16	18	23	18	8	3

7. निम्न आँकड़ों से P_{25}, P_{60} तथा P_{75} ज्ञात कीजिये।

वर्ग अन्तराल	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
बारम्बारता	15	26	25	40	34	20	25	15

8. एक प्रवेश–परीक्षा में 50 छात्रों द्वारा प्राप्तांक निम्न है।

वर्ग अन्तराल	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
बारम्बारता	6	8	20	9	7

यदि 34 अंक प्रवेश की अन्तिम सीमा हो, तो कितने प्रतिशत छात्रों ने 34 से अधिक अंक प्राप्त किये?

9. निम्न आँकड़ों से D_4 तथा P_{80} ज्ञात कीजिये।

आय (हजार रुपये में)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
परिवारों की संख्या	5	6	9	14	10	4	2

10. 100 छात्रों द्वारा एक कक्षा–परीक्षण में प्राप्तांको का वितरण निम्न है :

से अधिक प्राप्तांक	0	10	20	30	40	50	60	70
छात्रों की संख्या	100	92	77	57	40	25	15	5

यदि 70% छात्र सफल घोषित हुए तो सफल विद्यार्थी द्वारा प्राप्त न्यूनतम अंक क्या था?

23.5 बहुलक

पिछली कक्षाओं में आप बहुलक का अध्ययन कर चुके हैं। स्मरण कीजिये कि "बहुलक आँकड़ों का वह मान है जो बार–बार घटित होता है"।

माध्यिका की तरह ही बहुलक का भी बहुत अधिक व्यावहारिक उपयोग है। इसका उपयोग रेडीमेड कपड़े बनाने वालों के लिये, जूते तथा सामान्य उपयोगिता की वस्तुओं, के उद्योग में सर्वाधिक है। जूते और कपड़े बनाने वाले उन साइज के जूते एंव कपड़े अधिक बनाते हैं जिनकी बिक्री अधिक होती है।

असंसाधित आँकड़ों से आपने बहुलक निकालना सीखा है, यहाँ हम पुनः उदाहरण द्वारा समझने का प्रयास करेंगे।

उदाहरण 12 निम्न आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिये।

3, 5, 7, 4, 5, 3, 5, 6, 8, 9, 5, 3, 5, 3, 6, 9, 7, 4

हल आइये उपरोक्त आँकड़ों से बारम्बारता सारणी तैयार करें।

x_i:	3	4	5	6	7	8	9
f_i:	4	2	5	2	2	1	2

अब क्योंकि आँकड़ा 5 सर्वाधिक बार (5 बार) आया है, अतः बहुलक 5 होगा।

उदाहरण 13 यदि उपरोक्त उदाहरण 12 में प्रारम्भ से दूसरे स्थान पर 5 को बदल कर 3 रख दें तो नये आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिये।

हल चूँकि प्रारम्भ से दूसरा पद बदलकर 3 हो गया है, नये आँकड़ों का रूप निम्न हो जायेगा :

3,3,7,4,5,3,5,6,8,9, 5,3,5,3,6,9,7,4

उपरोक्त आँकड़ों से बारम्बारता सारणी बनाने पर, हम पाते हैं

x_i	3	4	5	6	7	8	9
f_i	5	2	4	2	2	1	2

अतः नया बहुलक 3 है।

23.5.1 *बारम्बारता वितरण का बहुलक निकालना* समान वर्ग अन्तराल के बारम्बारता वितरण से बहुलक, निम्नलिखित सूत्र द्वारा निकाला जाता है :

$$M = l_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i \text{, जहाँ}$$

l_1 बहुलक वर्ग की निम्न सीमा है

f_1 बहुलक वर्ग की बारम्बारता है

f_0 तथा f_2 बहुलक के पूर्व तथा उस वर्ग के पश्चात् आगे आनेवाले वर्ग की क्रमशः बारम्बारतांए हैं तथा i वर्ग अन्तराल है।

आइये कुछ उदाहरण लेकर बहुलक का परिकलन स्पष्ट करें।

उदाहरण 14 निम्न आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिये :

वर्ग अन्तराल :	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	योग
बारम्बारताएं :	30	45	75	35	25	15	225

हल बहुलक वर्ग स्पष्टतया 20–25 है। यहाँ

$l_1 = 20,\ f_1 = 75,\ f_0 = 45$ तथा $f_2 = 35$ तथा $i = 5$

$$\text{अतः } M = 20 + \frac{75-45}{2\times 75-45-35} \times 5$$

$$= 20 + \frac{30}{70}\times 5 = 22.14$$

उदाहरण 15 फैक्ट्री A तथा B में कर्मचारियों की आयु निम्न आँकड़ों द्वारा दी गई है:

कर्मचारियों की आयु (वर्षों में)	फैक्ट्री में कर्मचारियों की संख्या	
	A	**B**
20-30	5	8
30-40	26	40
40-50	78	58
50-60	104	90
60-70	98	83

तो फैक्ट्री A तथा B के कर्मचारियों की आयु का बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल

फैक्ट्री A

बहुलक वर्ग : 50-60

$l_1=50, f_1=104, f_0=78$

तथा $f_2 = 98$ तथा $i = 10$

फैक्ट्री B

50-60 बहुलक वर्ग

$l_1=50, f_1=90, f_0=58$

$f_2 = 83$ तथा $i = 10$

$$M = 50 + \frac{104-78}{208-78-98} \times 10 \qquad M = 50 + \frac{90-58}{180-58-83} \times 10$$

$$= 50 + \frac{65}{8} = 58.125 \qquad = 50 + \frac{320}{39} = 58.205$$

फैक्ट्री B के कर्मचारियों की बहुलक आयु 58.205 है, जबकि फैक्ट्री A के कर्मचारियों की बहुलक आयु 58.125 है।

प्रश्नावली 23.3

1. निम्न आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिये :

   15, 8, 26, 25, 24, 15, 18, 20, 24, 15, 19, 15

2. (i) निम्न आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिये :

   25, 16, 19, 48, 19, 20, 34, 15, 19, 20, 21, 24, 19, 16, 22, 16, 18, 20, 16, 19.

   (ii) उपर्युक्त आँकड़ों में यदि 19 को बदलकर 16 लिख दें, तो नये आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिये।

3. (i) यदि निम्न आँकड़ों का बहुलक 25 हो तो, x का मान ज्ञात कीजिए :

   15, 20, 25, 18, 14, 15, 25, 15, 18, 16, 20, 25, 20, x, 18

   (ii) उपर्युक्त आँकड़ों में यदि 20 तथा 18 के स्थान पर 15, 15 लिख दिया जाय तो नये आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिये।

4. निम्न बारम्बारता वितरण का बहुलक ज्ञात कीजिये :

वर्ग अन्तराल	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-60
बारम्बारता	25	34	50	42	28	14

5. 200 पुरुषों के समूह ने एक दुकान से कमीजें खरीदीं जिनकी माप निम्न है :

कमीज की माप	37	38	39	40	41	42	43	44
पुरुषों की संख्या जिन्होंने कमीज खरीदी	15	25	39	41	36	17	15	12

इस समूह द्वारा पहनी गई कमीज का बहुलक माप ज्ञात कीजिये :

6. छात्रों के दो समूह A और B के बहुलक आयु की तुलना कीजिये जो किसी प्रवेश–परीक्षा में बैठे हों :

आयु (वर्षों में)	समूह में छात्रों की संख्या	
	समूह A	समूह B
16-18	50	54
18-20	78	89
20-22	46	40
22-24	28	25
24-26	23	17

23.6 विभाजन मानों के गुण एंव दोष

23.6.1 *विभाजन मानों के गुण*

1. विभाजन मानों का परिकलन विशेष रूप से माध्यिका का खुले सिरे के वर्गों के लिये उपयोगी होता है।
2. विभाजन मान, चरम मानों से मुक्त हैं जबकि माध्य नहीं, उदाहरण स्वरूप 3,4,6,7,10,15,2,25,60,100, का माध्य 25 है जबकि चतुर्थक 5 है तथा माध्यिका 12.5 है।
3. विभाजन मानों में माध्यिका का मान ग्राफ से ज्ञात किया जा सकता है जबकि अन्य केन्द्रीय प्रवृति के माप को ग्राफ से नहीं ज्ञात किया जा सकता है।
4. वास्तव में माध्यिका आँकड़ों का लगभग मध्य बिन्दु इंगित करती है, जबकि माध्य में ऐसा नही होता है जैसा कि उपर्युक्त उदाहरण से स्पष्ट है।

23.6.2 *विभाजन मानों के दोष*

1. समूह के आँकड़ों को माध्यिका अथवा अन्य विभाजन मानों के लिये आरोही अथवा अवरोही क्रम में रखना पड़ता है, जबकि अन्य केन्द्रीय प्रवृति के मानों में आवश्यक नहीं है।
2. विभाजन मानों में सभी प्रेक्षणों पर विचार करना आवश्यक नहीं होता।
3. यदि दो प्रेक्षणों के समूह के माध्यिका एंव दूसरे विभाजन मान ज्ञात हों, तो दोनों समूहों की संयुक्त माध्यिकाएं एंव अन्य विभाजन मान का परिकलन बिना सभी आँकड़ों के मिलाये नहीं किया जा सकता, जबकि माध्य निकाला जा सकता है।
4. माध्यिका प्रतिदर्शों के उतार–चढ़ाव से प्रभावित हो जाती है।
5. कुछ स्थितियों में विभाजन मान विशेष रूप से माध्यिका दो प्रक्षणों के मध्य मान का सन्निकटीकरण करके निकाला जाता है, जबकि माध्य के लिये ऐसी स्थिति नहीं आती।

सूचकांक (INDEX NUMBERS)

अध्याय 24

24.1 भूमिका

प्रायः हम समाचार–पत्रों में निम्न प्रकार के समाचार पढ़ते हैं :

"निर्वाह खर्च सूचकांक 25% बढ़ा"

"थोक मूल्यों का सूचकांक 6 बिन्दु ऊपर बढ़ा; सरकारी कर्मचारियों को अब अधिक महंगाई भत्ता मिलेगा"

"औद्योगिक उत्पादन के सूचकांक में वर्ष 1999-2000 की अपेक्षा वृद्धि दर्ज की"

"अपराध की दर महानगरों में कम हुई"

ये सभी समाचार किसी आधार वर्ष की तुलना में वर्तमान वर्ष में स्थिति को दर्शाते हैं; जैसे निर्वाह–खर्च में वृद्धि, थोक मूल्य की दरों में वृद्धि, औद्योगिक उत्पादन में वृद्धि तथा महानगरों में अपराध की दर में कमी इत्यादि। ये सभी स्थितियाँ विभिन्न क्षेत्रों में सूचकांक के अनुप्रयोग को दर्शाती हैं। इस अध्याय में हम सूचकांक के विषय में अध्ययन करेंगे।

24.2 सूचकांक

सूचकांक की परिभाषा देने के पूर्व, यह बताना आवश्यक होगा कि सर्वप्रथम इसका उपयोग 1764 ई. में किया गया। इटली में इसकी तुलना सन् 1750 ई. के मूल्यों की सन्, 1500 ई. के मूल्य–स्तर से की गई। यद्यपि सूचकांक का विकास प्रथमतः मूल्य परिर्वतन के प्रभाव के मापन हेतु किया गया परन्तु अब सूचकांक का अनेक क्षेत्रों में उपयोग होता है जैसा कि उपर्युक्त समाचारों से स्पष्ट हो जाता है।

विभिन्न सांख्यिकीविदों ने विभिन्न अवसरों पर सूचकांक को निम्न रूप में परिभाषित किया है:

क्राक्स्टेन तथा काउडेन (Croxten और Cowden) के अनुसार सूचकांक दो सम्बन्धित चरों के समूहों के परिणामों के अन्तर का निर्धारण करने की विधियां हैं।

स्पीगेल (Spiegel) के अनुसार सूचकांक एक सांख्यिकीय माप है जो किसी चर में या सम्बन्धित चरों के समूह का समय, भौगोलिक स्थिति या अन्य विशेषता जैसे आय या व्यवसाय आदि के सापेक्ष परिवर्तन को दर्शाता है।

ए. एम. टटल का कहना है कि सूचकांक वह एकांकी अनुपात (साधारणतः प्रतिशत) है जो दो विभिन्न समयों, स्थानों या स्थितियों में लिए गए चरों के संयुक्त या माध्य (औसत) में परिवर्तन को मापता है।

उपर्युक्त परिभाषायें स्पष्ट रूप से इस ओर इंगित करती हैं कि सूचकांक किन्हीं दो विभिन्न समयों में किसी चर या चरों के समूह में परिवर्तन मापने की विधियाँ हैं। जो प्रायः अनुपात या प्रतिशत के रूप में व्यक्त किए जाते हैं।

24.2.1 *सूचकांकों का वर्गीकरण*

सूचकांकों का वर्गीकरण उनके क्रियाकलापों के मापन अथवा उपयोगिता के आधार पर निम्न प्रकार से किया जाता है :—

(i) मूल्य (ii) मात्रा (iii) मान तथा (iv) विशेष उद्देश्य से।

हम विस्तारपूर्वक इसकी विवेचना करेंगे :

(i) **मूल्य सूचकांक** मूल्यों की विशिष्टताओं में परिवर्तन का मापन करता है। उदाहरण स्वरूप उपभोक्ता मूल्य सूचकांक खुदरा दामों में परिवर्तन दर्शाता है, जो उपभोक्ता, वस्तुओं अथवा सेवाओं के बदले में देता है।

(ii) **मात्रा सूचकांक** मात्रा में परिवर्तन की माप बताता है जैसा कि किसी औद्योगिक उत्पादन का सूचंकाक जो औद्योगिक क्षेत्र में उत्पादन में परिवर्तन का मापन करता है।

(iii) **मान सूचकांक** किसी मूल्य की विशिष्टता में परिवर्तन का मापन करता है, जैसे कुल निर्माणमूल्य जो नये दिये गए ठेकों के रुपये के मूल्य में परिवर्तन का मापन करता है।

(iv) **विशेष अभिप्राय के लिये बनाये गए सूचकांक**, जो समय—समय पर बनाये जाते हैं, तथा जो विशेष विशिष्टताओं को मापते हैं, जिनका समय—समय पर मापन करना आवश्यक है।

24.2.2 *सूचकांकों की उपयोगिता* : सूचकांक का उपयोग मुख्यतः निम्न दशाओं में होता है :

1. सूचकांकों का प्रयोग आर्थिक संकेतन में होता है।

2. ये हमें नीतिगत परिवर्तन के लिये तथा किसी निर्णय पर पहुँचने के लिये दिशा निर्देश देते हैं।

3. प्रवृति के लक्षण का संकेत देते हैं।
4. इनका उपयोग मुद्रा द्वारा खरीदने की क्षमता को मापने में होता है।
5. इनका उपयोग मौलिक आँकड़ों को मूल्य परिवर्तन के अनुसार अथवा निर्वाह खर्च में परिवर्तन को मजदूरी के परिवर्तन में समायोजन करने में होता है, जो अंकित मजदूरी को वास्तविक मजदूरी बनाता है।

24.2.3 *सूचकांकों की रचना में आने वाली समस्याऐं*

सूचकांकों की रचना करते समय निम्नलिखित समस्याओं पर ध्यान देना होगा :—

(i) **उद्देश्य जिसके लिये सूचकांक का उपयोग करना है:** अर्थात इससे क्या मापा जायेगा एक विशेष सूचकांक सभी वर्गों के लोगों के लिये उपयुक्त नहीं है। कल्पना करें कि हमें श्रमजीवी वर्ग के लिये सूचकांक की रचना करनी है, तो इसमें भव्य प्रसाधनों पर विचार नहीं करना होगा। पुनः यदि उपभोक्ता वस्तुओं के लिये इसकी रचना करनी है तो थोक विक्रेता मूल्यों में इसका समावेश नहीं होगा, अन्यथा यह सूचकांक उपयोगी साधन न होकर भ्रामक एवं खतरनाक सिद्ध होगा।

(ii) **वस्तुओं का चुनाव :** चुनी हुई वस्तुएँ ऐसी होनी चाहिये जो स्वाद, आदत तथा परिपाटी का सही प्रतिनिधित्व करती हैं। उदाहरण के लिये यदि निम्न आय वालों के लिये सूचकांक की रचना करनी है तो इनमें उन्हीं उपभोक्ता वस्तुओं का समावेश होगा जिनका उपयोग इस वर्ग के लोग सामान्यतः करते हैं।

(iii) **आधार—काल का चुनाव :** यह बहुत ही महत्वपूर्ण समस्या है कि हम किस वर्ष या काल को आधार वर्ष मानें। यह वर्ष सामान्य रूप से अपसामान्यताओं से मुक्त होगा; जैसे युद्ध, बाढ़, भूकम्प, मंदी इत्यादि का वर्ष न हो, साथ ही तुलना वाले वर्ष से अधिक पीछे न हो। (चुने हुए वर्ष को आधार वर्ष तथा जिसका सूचकांक ज्ञात करना है उसे विचाराधीन वर्ष कहेंगे)

(iv) **महत्ता अथवा भार निर्दिष्ट करना :** सूचकांक की रचना करते समय उन उपभोक्ता वस्तुओं पर ध्यान केन्द्रित करना चाहिए जो दैनिक रूप में अधिक उपयोगी तथा महत्वपूर्ण हों। जैसे गेंहूँ की महत्ता चाय या काफी की अपेक्षा अधिक होनी चाहिये।

(v) **माध्य का चुनाव :** चूँकि सूचकांक विशिष्ट माध्य होते हैं, अतः बहुत सावधानी से यह चुनाव होना चाहिये कि हम किस माध्य (समान्तर माध्य, माध्यिका, बहुलक या गुणोत्तर माध्य) का उपयोग सूचकांक की रचना में करेंगे। समान्तर माध्य की गणना एवं उपयोगिता सरल होने के साथ इसका परिकलन आसान भी है। यद्यपि सैद्धान्तिक रूप में गुणोत्तर माध्य अधिक स्थिर होने के कारण ग्राह्य हो सकता है तथापि सुचकांक की रचना में समान्तर माध्य का ही उपयोग हम करेंगे।

24.3 सूचकांक की रचना—विधियां

सूचकांक दो प्रकार के होते हैं :—

(i) अभारित सूचकांक; (ii) भारित सूचकांक

अभारित सूचकांकों में वस्तुओं को भार नहीं दिया जाता है, जबकि भारित सूचकांकों में वस्तुओं की महत्ता के अनुसार भार दिया जाता है। यहाँ हम केवल अभारित सूचकांकों का विवेचन करेंगे। निम्न दो प्रकार की मुख्य विधियां अभारित सूचकांकों की रचना में प्रयोग की जाती है :—

(b) साधारण योग की विधि, तथा

(c) साधारण सापेक्ष माध्य विधि

हम एक—एक कर इनका विवेचन नीचे विस्तार से करेंगे :—

24.3.1 *साधारण योग विधि*

सूचकांक निकालने की यह सरल विधि है। इस विधि में पहले हम विभिन्न वस्तुओं के दामों का योग विचाराधीन वर्ष के लिये ज्ञात करेंगे। इस योग को तदनुरूपी आधार वर्ष में वस्तुओं के दामों के योग से भाग देते हैं तथा परिणाम को 100 से गुणा करेंगे ताकि सूचकांक का मान प्रतिशत में निकल आये। सूत्र के रूप में प्रतीकात्मक, हम लिखते हैं

$$P_{01} = \frac{\sum p_1}{\sum p_0} \times 100,$$

जहां P_{01} विचाराधीन वर्ष का वांछित सूचकांक है, Σp_1, वर्तमान या विचाराधीन वर्ष में खरीदी गई विभिन्न वस्तुओं के दामों का योग है और Σp_0 आधार वर्ष में विचाराधीन वस्तुओं के सापेक्ष दामों का योग है।

आइये हम एक उदाहरण द्वारा इसे स्पष्ट करने का प्रयास करें :

उदाहरण 1 कुछ वस्तुओं के खुदरा दामों (रुपयों में) में परिवर्तन की सारणी नीचे दी गई है जिन्हें वर्ष 1986 तथा 1998 में खरीदा गया :—

वस्तुएं	A	B	C	D	E	F	G	H
दाम (रुपयों में) 1986 में	160.20	135.00	102.00	178.80	21.50	19.50	76.00	107.00
दाम (रुपयों में) 1998 में	220.40	176.20	150.00	210.20	42.00	45.00	102.00	154.20

साधारण योग विधि के प्रयोग से वर्ष 1986 को आधार वर्ष लेकर 1998 के सूचकांक की रचना कीजिए।

हल हम निम्न सारणी की रचना करते हैं :

वस्तुएं	**दाम 1986 में (रुपयों में) (p_0)**	**दाम 1998 में (रुपयों में) (p_1)**
A	160.20	220.40
B	135.00	176.20
C	102.00	150.00
D	178.80	210.20
E	21.50	42.00
F	19.50	45.00
G	76.00	102.00
H	107.00	154.20
योग	$\Sigma p_0 = 800.00$	$\Sigma p_1 = 1100.00$

हम पाते हैं $\Sigma p_0 = 800.00$

तथा $\Sigma p_1 = 1100.00$

इसलिये $P_{01} = \frac{\sum p_1}{\sum p_0} \times 100$

$$= \frac{1100}{800} \times 100 = 137.5 \qquad (1)$$

(1) से हमें पता चलता है कि 1998 में सम्मिलित वस्तुओं के दाम उनके 1986 के तदनुरूपी सम्मिलित दामों का 137.5 % है अर्थात 1998 के वस्तुओं के दाम 1986 के दामों की अपेक्षा लगभग 38 % अधिक है। दूसरे शब्दों में 1998 का सूचकांक, 1986 को आधार वर्ष मानकर 137.5 है।

उदाहरण 2 निम्न आँकड़ों के लिये 1992 का सूचकांक, 1987 को आधार वर्ष मानकर 125 पाया गया, तो लुप्त आँकड़ें x तथा y ज्ञात कीजिए यदि Σp_0 का मान 360 है।

वस्तुएं	A	B	C	D	E	F
दाम (रुपयों में) 1987 में	40	60	20	50	x	110
दाम (रुपयों में) 1992 में	55	70	40	y	100	115

हल हम आँकड़ों से निम्न सारणी बनाते हैं :

वस्तुएं	दाम (रुपयों में) 1987 में	दाम (रुपयों में) 1992 में
A	40	55
B	60	70
C	20	40
D	50	y
E	x	100
F	110	115
	TOTAL: $\Sigma p_0 = (280 + x)$	$\Sigma p_1 = (380 + y)$

दिया हुआ है कि $\Sigma p_0 = 360$

इसलिये $280 + x = 360$

या $x = 80.$

पुनः $P_{01} = \dfrac{\sum p_1}{\sum p_0} \times 100$

या $125 = \dfrac{380+y}{360} \times 100$

या $450 = 380 + y$

या $y = 70.$

अतः लुप्त आँकड़े हैं $x = 80$ तथा $y = 70.$

24.3.2 *साधारण सापेक्ष माध्य विधि* :— इस विधि में हम प्रत्येक ली गई वस्तु का सापेक्ष मूल्य वर्तमान वर्ष के मूल्य को आधार वर्ष के मूल्य से भाग करके परिणाम को 100 से गुणा किया जाता है, और फिर सापेक्ष मूल्यों की औसत किसी भी केन्द्रीय प्रवृति के माप के अनुसार ली जाती है। यहाँ हम केवल समान्तर माध्य को ही लेंगे। अतः

$$P_{01}=\frac{1}{N}\sum\left(\frac{p_1}{p_0}\times 100\right)$$

जहाँ N वस्तुओं की संख्या है।

आइये हम उदाहरणों द्वारा उपरोक्त को स्पष्ट करें :

उदाहरण 3 साधारण सापेक्ष माध्य विधि से 1995 को आधार मानकर, वर्ष 2000 के लिए मूल्य सूचकांक की गणना कीजिए।

वस्तुएं	A	B	C	D	E	F
दाम (रुपयों में) 1995	40	60	20	50	80	110
दाम (रुपयों में) 2000	55	70	40	70	100	115

हल आँकड़ों के आधार पर निम्न सारणी बनाई गई :

वस्तुएं	1995 में दाम (रुपयों में)	2000 में दाम (रुपयों में)	2000 के सापेक्ष दाम (रुपयों में)
A	40	55	$\frac{55}{40}\times 100 = 137.50$
B	60	70	$\frac{70}{60}\times 100 = 116.66$
C	20	40	$\frac{40}{20}\times 100 = 200.00$
D	50	70	$\frac{70}{50}\times 100 = 140.00$
E	80	100	$\frac{100}{80}\times 100 = 125.00$
F	110	115	$\frac{115}{110}\times 100 = 104.54$

$$\sum\left(\frac{p_1}{p_0}\times 100\right) = 823.70$$

हम जानते हैं कि

$$P_{01} \text{ (मूल्य सूचकांक)} = \frac{1}{N}\sum\left(\frac{p_1}{p_0}\times 100\right)$$

$$= \frac{823.70}{6} = 137.28.$$

इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि 1995 की अपेक्षा 2000 के दामों में लगभग 37% की वृद्धि है।

प्रथम विधि से सूचकांक P_{01}, का मान 125 आता है (उदाहरण 2) परन्तु दूसरी विधि से 137.28 है, यह अन्तर दो भिन्न विधियों के कारण है।

उदाहरण 4 निम्न लिखित आँकड़ों से वर्ष 1992 को आधार वर्ष मानकर वर्ष 1999 का मूल्य सूचकांक सामान्य सापेक्ष माध्य विधि द्वारा तथा समान्तर माध्य का उपयोग करके ज्ञात कीजिये।

वस्तुएं 1992 में	A	B	C	D	E	F	G	H
दाम (रुपयों में) 1999 में	80	60	50	16	150	40	150	120
दाम (रुपयों में)	100	90	70	22	175	70	225	160

हल हम निम्न सारणी की रचना करते हैं :

	दाम (रुपयों में)		
वस्तुएं	**1992 में (p_0)**	**1999 में (p_1)**	$\frac{p_1}{p_0}\times 100$
A	80	100	125.00
B	60	90	150.00
C	50	70	140.00
D	16	22	137.50
E	150	175	116.66
F	40	70	175.00
G	150	225	150.00
H	120	160	133.34

$$\sum \frac{p_1}{p_0}\times 100 = 1127.50$$

हम जानते हैं कि $P_{01} = \frac{1}{N} \sum \frac{p_1}{p_0}\times 100$

$$= \frac{1127.50}{8} = 140.94.$$

प्रश्नावली 24.1

योग विधि द्वारा निम्न आँकड़ों से पूर्व दिये वर्ष को आधार वर्ष मान कर बाद के वर्ष का सूचकांक (1 से 3 तक) ज्ञात कीजिए।

1.

वस्तुएं	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
आधार वर्ष दाम (रूपयों में)	35	30	40	107	65
वर्त्तमान दाम (रूपयों में)	42	40	50	120	104

2.

वस्तुएं	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**
दाम (रूपयों में) 1962 में	4	18	40	60	15	8	104
दाम (रूपयों में) 1980 में	7	24	72	75	18	20	130

3.

वस्तुएं	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**
दाम (रूपयों में) 1990 में	40	16	72	22	68	19	55
दाम (रूपयों में) 2000 में	55	24	96	28	76	40	70

4. सन् 1982 को आधार वर्ष मान कर, साधारण योग विधि द्वारा सन् 1992 के लिए ज्ञात सूचकांक 116 है। यदि $\Sigma p_0 = 300$, तो लुप्त आँकड़े x तथा y को ज्ञात कीजिये।

वस्तुएं	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
दाम (रुपयों में) 1982 में	56	x	27	76	110	17
दाम (रुपयों में) 1992 में	64	20	y	84	124	20

5. निम्न आँकड़ों से साधारण योग विधि द्वारा सन् 1998 का सूचकांक, सन् 1994 को आधार वर्ष मान कर ज्ञात कीजिए।

वस्तुएं	**गेहूँ**	**चावल**	**दाल**	**दूध**	**कपड़े**
1994 में प्रति इकाई दाम (रुपयों में)	5.60	17.20	36.00	24.00	100.00
1998 में प्रति इकाई दाम (रुपयों में)	7.20	24.80	44.00	30.00	130.00

6. साधारण सापेक्ष माध्य विधि से वर्ष 1990 को आधार मान कर वर्ष 2000 का मूल्य सूचकांक ज्ञात कीजिए।

वस्तुएं 1986 में	A	B	C	D	E	F	G
दाम (रुपयों में)	16.00	36.00	104.00	72.00	18.00	250.00	180.00
1996 में दाम (रुपयों में)	24.00	45.00	130.00	108.00	21.00	300.00	225.00

7. साधारण सापेक्ष माध्य विधि द्वारा वर्तमान वर्ष का सूचकांक आधार वर्ष के सापेक्ष निम्न आँकड़ों से ज्ञात करें।

वस्तुएं	**आधार वर्ष में दाम (रुपयों में)**	**वर्तमान वर्ष में दाम (रुपयों में)**
A	18.50	22.20
B	28.00	35.00
C	42.00	52.50
D	25.00	37.50
E	56.00	70.00
F	17.00	21.25
G	60.00	78.00
H	100.00	115.00
I	70.00	105.00
J	14.00	17.50
K	78.00	91.00

8. साधारण सापेक्ष माध्य विधि द्वारा वर्ष 1986 को आधार वर्ष मान कर वर्ष 1996 का सूचकांक 127 पाया गया। यदि $\Sigma p_0 = 263$ हो तो लुप्त आँकड़े x, y ज्ञात कीजिए।

वस्तुएं	A	B	C	D	E	F	योग
1986 में (p_0) दाम (रुपयों में)	80	70	50	x	18	25	263
1996 में (p_1) दाम (रुपयों में)	100.00	87.50	61.00	22.00	y	32.50	—

उत्तरमाला

प्रश्नावली 12.1

1. $x^2+y^2+2y=0$

2. $x^2+y^2+6x+4y-36=0$

3. $36x^2+36y^2-36x-18y+11=0$

4. $x^2+y^2-x-y=0$

5. $x^2+y^2-2ax-2ay=0$

6. $x^2+y^2-2ax\cos\alpha-2ay\sin\alpha=0$

7. $(0, 1), \sqrt{2}$

8. $(-5, 3), \sqrt{30}$

9. $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right),\frac{1}{2}$

10. $(2,-3), 3\sqrt{2}$

11. $\left(\frac{1}{2},-1\right),\frac{\sqrt{17}}{2}$

12. $x^2+y^2-2x+6y-40=0$

13. $x^2+y^2-4x+6y-96=0$

14. $x^2+y^2+4x-21=0$ और
$x^2+y^2-12x+11=0$

15. $x^2+y^2+4y-21=0$ और
$x^2+y^2-12y+11=0$

प्रश्नावली 12.2

1. $x^2+y^2-18x+6y+25=0$

2. $13x^2+13y^2-64x+10y-332=0$

3. $x^2+y^2-5x-y=0$

4. $x^2+y^2-2x+2y-23=0$

5. $x^2+y^2+4x+6y-85=0$

6. वृत्त

7. बिंदु $(-1, 0)$

8. वृत्त

9. बिंदु $(-1,-5)$

10. वृत्त नहीं

11. $x^2+y^2-2x+6y+6=0$

12. $x^2+y^2+4x+6y-12=0$

13. $x^2 + y^2 - ax - by = 0$

14. $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky = p^2 + q^2 - 2hp - 2kq$

15. $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$; (2, 1); 5

16. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 87 = 0$

प्रश्नावली 12.3

3. $x = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\alpha,\ y = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\alpha$

4. $x = -1 + \sqrt{6}\ \cos\alpha,\ y = 2 + \sqrt{6}\ \sin\alpha$

5. $x = -\frac{p}{2} + \frac{p}{\sqrt{2}}\cos\alpha,\quad y = -\frac{p}{2} + \frac{p}{\sqrt{2}}\sin\alpha$

6. $x^2 + y^2 = 9$, (0, 0), 3

7. $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$, (a, b), c

8. $(x - 7)^2 + (y + 3)^2 = 16$, (7, – 3), 4

9. $x = -\frac{2}{3} + \frac{5}{3}\cos\theta,\quad y = 1 + \frac{5}{3}\sin\theta$

10. $x = \frac{5}{4} + \frac{7}{4}\sqrt{2}\cos\theta,\quad y = \frac{7}{4} + \frac{7}{4}\sqrt{2}\sin\theta$

प्रश्नावली 12.4

1. $x^2 + y^2 - x - 11 = 0$

2. $x^2 + y^2 - x + 2y - 21 = 0$

3. $x^2 + y^2 - 5x - 7y + 16 = 0$

4. $x^2 + y^2 - 7x + 7y + 22 = 0$

5. $x^2 + y^2 - (p+r)x - (q+s)y + pr + qs = 0$

6. $x^2 + y^2 - 3x - 2y - 21 = 0$

7. $x^2 + y^2 - 13x - 11y + 68 = 0$

8. $x^2 + y^2 + x - 2y - 35 = 0$

प्रश्नावली 12.5

1. (0, 2) और (2,0)

2. (3, – 4) और (4, 3)

3. (5, 0) और (–3, 4)

4. $\left[\dfrac{-mc \pm \sqrt{a^2(1+m^2)-c^2}}{1+m^2}, \dfrac{c \pm \sqrt{a^2(1+m^2)-c^2}}{1+m^2}\right]$; $a^2\ (1+m^2) = c^2$

5. सम्पर्क बिन्दु $\left(\dfrac{-a}{\sqrt{2}}, \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)$ है। 7. ± 5

प्रश्नावली 12.6

1. $x + y = 2$
2. $x - 3y = 10$
3. $3x + 4y = -25$
4. $11x - 2y = 46$
5. $11x - 2y = 16$
6. $4x + 3y + 6 = 0$
7. $x \cos \alpha + y \sin \alpha = a(1 + \cos \alpha)$
8. $\sqrt{2}$
9. 7
10. $\sqrt{5}$
11. 4
12. 3
13. $\sqrt{15}$
14. $2x + y \pm 3\sqrt{5} = 0$
15. $5x + 12y + 68 = 0$, $5x + 12y - 10 = 0$
17. $a^2(l^2 + m^2) = n^2$

अध्याय 12 पर विविध प्रश्नावली

1. $5x^2 + 5y^2 - 16x + 16y + 15 = 0$
2. $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 84 = 0$
3. $x^2 + y^2 \pm 6x \pm 6\sqrt{2}y + 9 = 0$
4. $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 0$
5. $x^2 + y^2 - 17x - 19y + 50 = 0$
6. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 51 = 0$
9. $(x-7)^2 + (y-6)^2 = 26$
10. $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$
12. $y = x\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$
14. $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 4 = 0$

प्रश्नावली 13.1

1. $y^2 = 16x$
2. $x^2 = -8y$
3. $2y^2 = 9x$
4. $3x^2 = -4y$

5. $(2, 0)$, $x = -2$

6. $\left(0, \frac{3}{2}\right)$, $y = -\frac{3}{2}$

7. $(-3, 0)$, $x = 3$

8. $(0, -4)$, $y = 4$

प्रश्नावली 13.2

1. $20, 10, (\pm 5\sqrt{3}, 0), (\pm 10, 0), \frac{\sqrt{3}}{2}, \ x = \pm \frac{20}{\sqrt{3}}$

2. $26, 10, (\pm 12, 0), (\pm 13, 0), \frac{12}{13}, \ x = \pm \frac{169}{12}$

3. $34, 30, (0, \pm 8), (0, \pm 17), \frac{8}{17}, \ y = \pm \frac{289}{8}$

4. $26, 24, (\pm 5, 0), (\pm 13, 0), \frac{5}{13}, \ x = \pm \frac{169}{5}$

5. $8, 2, (\pm \sqrt{15}, 0), (\pm 4, 0), \frac{\sqrt{15}}{4}, \ x = \pm \frac{16}{\sqrt{50}}$

6. $8, 2, (0, \pm \sqrt{15}), (0, \pm 4), \frac{\sqrt{15}}{4}, \ y = \pm \frac{16}{\sqrt{15}}$

7. $6, 2\sqrt{6}, (0, \pm \sqrt{3}), (0, \pm 3), \frac{1}{\sqrt{3}}, \ y = \pm 3\sqrt{3}$

8. $9x^2 + 25y^2 = 225$

9. $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1$

10. $25x^2 + 9y^2 = 900$

11. $25x^2 + 9y^2 = 225$

12. $7x^2 + 15y^2 = 247$

13. $x^2 + 2y^2 = 18$

14. $16x^2 + 7y^2 = 688$

15. $9x^2 + 5y^2 = 180$

प्रश्नावली 13.3

1. $(\pm 4, 0), (\pm 5, 0), \frac{5}{4}, x = \pm \frac{16}{5}$

2. $(0, \pm 4)$, $(0, \pm\sqrt{17}), \frac{\sqrt{17}}{4}, y = \pm\frac{16}{\sqrt{17}}$

3. $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)\left(\pm\sqrt{\frac{5}{6}}, 0\right)\sqrt{\frac{5}{2}}, x = \pm\sqrt{\frac{2}{15}}$

4. $\left(0, \pm\frac{1}{4}\right)\left(0, \pm\frac{\sqrt{5}}{4}\right)\sqrt{5}, y = \pm\frac{1}{4\sqrt{5}}$

5. $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{39} = 1$

6. $7x^2 - 9y^2 = 343$

7. $y^2 - x^2 = 5$

8. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$

9. $15x^2 - y^2 = 15$

प्रश्नावली 13.4

1. नाभि दिये गये व्यास का मध्य बिन्दु है।

2. 2.23 मी. (लगभग)

3. 9.11 मी. (लगभग)

4. 1.56 मी. (लगभग)

5. $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{9} = 1$

6. 18 वर्ग इकाई

7. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

8. $8\sqrt{3}a$

प्रश्नावली 14.1

1. $\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

2. $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

3. $\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

4. $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

5. $x = (2n - 1)\frac{\pi}{2}, n \in I$

6. $x = \frac{n\pi}{3}, n \in I$

7. $x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, या $x = m\pi,\ m, n \in I$

8. $x = n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}$ या $(2m+1)\frac{\pi}{2}, m, n \in I$

9. $x = \frac{n\pi}{2}$ या $\frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{8}, m, n \in I$

10. $x = n\pi$ या $2m\pi, m, n \in I$

11. $x = 2n\pi - \frac{\pi}{2}$ या $\frac{2m\pi}{5} - \frac{\pi}{10}$, $m, n \in I$

12. $x = \frac{2k\pi}{m+n}$ या $\frac{2(k+1)\pi}{m-n}, k \in 1$

13. $x = (3n+1)\frac{\pi}{3}$ या $(3n-1)\frac{\pi}{3}$ [या $\theta = \frac{n\pi}{3}$], $n \in I$

14. $x = n\pi$ या $n\pi + \frac{\pi}{3}$ या $n\pi + \frac{2\pi}{3}, n \in I$ या $\left[x = n\pi,\ x = n\pi \pm \frac{\pi}{3}\right]$

15. $x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ या $x = m\pi + (-1)^m \frac{7\pi}{6}, m, n \in I.$

16. $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}, n \in I$

17. $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}, n \in I$

18. $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, n \in I$

19. $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, n \in I$

प्रश्नावली 14.2

1. $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0$ **2.** $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$ **3.** 216 वर्ग इकाई **4.** $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$

11. $\angle A = 90°$, $\angle B = 30°$, $\angle C = 60°$

12. $a = 70$ (लगभग), $b = 76$ (लगभग), $\angle C = 59°$

13. $c = 124.6$, $b = 162$, $\angle C = 47°$

14. $\angle A = 26°\ 23'$, $\angle B = 36°\ 20'$, $\angle C = 117°\ 17'$

15. $c = \sqrt{6}$, $\angle A = 105°$, $\angle B = 15°$

प्रश्नावली 14.3

1. $-\frac{\pi}{6}$ **2.** $\frac{\pi}{6}$ **3.** $\frac{\pi}{6}$ **4.** $\frac{\pi}{3}$

5. $\frac{2\pi}{3}$ **6.** $-\frac{\pi}{4}$ **11.** 0 **12.** 1

13. $\frac{x+y}{1-xy}$ **14.** $\frac{\pi}{4}$ **15.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **16.** $\sin^{-1}\frac{x}{a}$

17. $3\tan^{-1}\frac{x}{a}$ **18.** $\frac{x}{2}$ **19.** $\frac{\pi}{4}-x$

प्रश्नावली 14.4

1. 986.55 मी. **2.** 428.15 मी.

3. 21.65 मी., बिन्दु प्रकाश स्तम्भ से 12. 5 मी. दूर है।

4. 15 मिनट **7.** 44.43 मी. **8.** 36° 35′, 1° 35′

9. 215.5 मी. **10.** 11.98 मी. **11.** 225 मी.

अध्याय 14 पर विविध प्रश्नावली

1. $x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}$ या $x = m\pi - \frac{\pi}{4}$, जहाँ $m, n \in I$

2. $x = n\pi + (-1)^n \sin^{-1}\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{8}\right), n \in I$

या $n\pi + (-1)^n \sin^{-1}\frac{-1-\sqrt{17}}{8}$, जहाँ $n \in I$

3. $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, जहाँ $n \in I$

4. $x = \frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{9}$, जहाँ $n \in I$

प्रश्नावली 15.1

1.	15	**2.**	24	**3.**	(i) 20,	(ii)	380
4.	120	**5.**	210	**6.**	(i) 40320	(ii)	5040
7.	5040	**8.**	720	**9.**	720	**10.**	120
11.	8	**12.**	336	**13.**	(i) 125,	(ii)	60
14.	$2^3, 2^4, 2^5, 2^n$	**15.**	12	**16.**	1920	**17.**	64
18.	6	**19.**	16	**20.**	22814400		

प्रश्नावली 15.2

1. (i) 24, (ii) 720, (iii) 5040, (iv) 40200 (v) 600 (vi) 1080, (vii) 240

2. 8, नहीं **3.** 48, नहीं **4.** 1680, नहीं **5.** 190

6. (i) 15, (ii) 105 **7.** 121 **8.** (i) 24, (ii) 24

9. (i) 5040, (ii) 1320, (iii) n, (iv) $n^2 - n$ (v) $n^3 - 3n^2+2n$

10. (i) 15, (ii) 35, (iii) 455.

प्रश्नावली 15.3

1.	720	**2.**	5040	**3.**	720	**4.**	24
5.	60	**6.**	120, 48	**7.**	4536	**8.**	720
9.	56	**10.**	11880	**12.**	(i) 3 (ii) 3 (iii) 4		
13.	9	**15.**	40320	**16.**	720, 120	**17.**	336
18.	36000	**19.**	24 (i) 6 (ii) 6 (iii) 12			**20.**	48
21.	12	**22.**	280	**23.**	20	**24.**	33810
25.	30	**26.**	6	**27.**	(i) 12 (ii) 12.		

प्रश्नावली 15.4

1. 120 **2.** 70 **3.** 55

4. (i) 3003 (ii) 190 (iii) 276 (iv) 142506

5.	22, 26334	**6.**	91	**7.**	(i) 5 (ii) 6	**13.**	$n = 12, r = 4$
14.	210	**15.**	455	**16.**	66	**17.**	350
18.	2000	**19.**	40	**20.**	45	**21.**	35
22.	778320	**23.**	3960	**24.**	36750		

प्रश्नावली 15.5

1. 1814400 **2.** 720 **3.** 24 **4.** 126

5. 6; $A \to III$, $B \to I$, $C \to II$. **6.** 32, 62 **7.** 369600

अध्याय 15 पर विविध प्रश्नावली

1. 14400 **2.** 2880 **3.** 365 **4.** 600, 120

5. 313 **6.** (i) 720 (ii) 1800 **7.** 28800 , 2880

8. 22 **9.** 907200 **10.** 41 **11.** $2\ {}^{20}C_5 \times {}^{20}C_6$

12. 817190 **13.** ${}^{52}C_{18} \times {}^{35}C_2 + {}^{52}C_{19} \times {}^{35}C_1 + {}^{52}C_{20}$

14. 4 **15.** 590490 **16.** 48 , 144

17. (i) 21 (ii) 441 (iii) 91 **18.** (i) 504 (ii) 588

19. 420 **20.** 886656 **21.** 50400

22. $2(r-1)\ {}^{n-2}P_{r-2}$

प्रश्नावली 16.1

1. (i) $1 - 6x + 15x^2 - 20x^3 + 15x^4 - 6x^5 + x^6$

(ii) $32x^{-5} - 40x^{-3} + 20x^{-1} - 5x + \frac{5}{8}x^3 - \frac{1}{32}x^5$

(iii) $1 + 3x + 6x^2 + 7x^3 + 6x^4 + 3x^5 + x^6$

(iv) $x^{11} - 11x^{10}y^{-1} + 55x^9y^{-2} - 165x^8y^{-3} + 330x^7y^{-4}$
$- 462x^6y^{-5} + 462x^5y^{-6} - 330x^4y^{-7} + 165x^3y^{-8}$
$- 55x^2y^{-9} + 11xy^{-10} - y^{-11}$

2. (i) 84 (ii) -101376 (iii) 10206

3. (i) -3432 (ii) $\frac{5}{12}$ (iii) 495

4. (i) ${}^6C_r\, x^{12-2r}(-y)^r$ (ii) ${}^{12}C_r(-x^2)^r$ (iii) ${}^{12}C_r\, x^{24-3r}(-1)^r$

5. $-1760x^9y^3$ **7.** (i) $-\frac{105}{8}x^9$ और $\frac{35}{48}x^{12}$ (ii) $61236x^5y^5$

8. 18564 **10.** $n = 15$ **11.** $r = 3,\ n = 7$

12. $n = 55$ **13.** $(1 + 2)^5$ **14.** $n = 5, x = 2, a = 3$

15. $n = 7, 14$ 17. $a = \frac{9}{7}$ 18. $m = 4$

19. $m = 1$

प्रश्नावली 16.2

1. (i) 995009990004999

(ii) 92236816

(iii) 17596287801

(iv) 1126162419264

2. (i) $(1.1)^{10000}$ बड़ा है 1000 से

(ii) $(1.2)^{4000}$ बड़ा है 800 से

3. (i) 152

(ii) $18\sqrt{3}$

प्रश्नावली 16.3

1. $1-3x^4 + 6x^8 - 10x^{12} + \ldots$ 2. $1 + 2x + 4x^2 + \ldots$

3. $5^{\frac{-1}{2}}\left(1-\frac{2}{5}x+\frac{6}{25}x^2+\ldots\right)$

4. $4^{\frac{-1}{3}}\left(1+\frac{x}{4}+\frac{x^2}{8}+\ldots\right)$

5. $4^{\frac{-1}{3}}\left(1+\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{8}+\ldots\right)$, $\frac{-2}{\sqrt{3}} < x < \frac{2}{\sqrt{3}}$.

6. 10.00996 7. 10.0332 8. 3.002

9. 6.0092 10. 5.002 11. 5.01329

12. $\frac{15015}{16}$ 13. $\frac{208}{9}x^{14}$

15. $\frac{1.3.5\ldots(5-2r)}{r!}2^{\frac{3-4r}{2}}3^{r+1}x^r$

16. 1.06 17. 1.0540926 18. 0.1459

20. $m = -3$ 21. $a = \pm 2, b = \pm 12$ 22. $m = 3, -2$

अध्याय 16 पर विविध प्रश्नावली

1. $27x^6 - 54ax^5 + 117a^2x^4 - 116a^3x^3 + 117a^4x^2 - 54a^5x + 27a^6$

2. ${}^nC_{n-r+1}x^{r-1}a^{n-r+1}$ **3.** 1, 14 **4.** 12

6. $\frac{1}{2}$ **8.** $1, \frac{-35}{24}$ **9.** $\frac{2}{9}, \frac{11}{27}x, \frac{4}{9}x^2$

10. 16 **12.** .99667

प्रश्नावली 17.1

2. $\frac{e^a b^n}{n!}$ **3.** $\frac{(-1)^n}{n!}\left[a-(b+c)n+cn^2\right]$

4. $e(1+x+x^2+\frac{5}{6}x^3+\frac{5}{8}x^4+...)$ **5.** $e^a - e^b$

6. $\frac{e^a - e}{a-1}$ **7.** $e^2 - 1$ **8.** $\frac{1}{e}$ **9.** $e - 1$

10. $5e$ **11.** $\frac{17}{6}e$ **12.** $3e$ **13.** $7e$

14. $11e$ **15.** $\frac{1}{n!}$

प्रश्नावली 17.2

6. $\log x$ **7.** $-1 + \log 4$ **8.** $\log 2 - \frac{1}{2}$

9. $\log \frac{3}{2}$ **10.** $\frac{1}{4} + \log \frac{4}{5}$ **11.** $\frac{1}{2}\log 2$

प्रश्नावली 18.1

1. कथन है **2.** कथन है **3.** कथन है

4. कथन है **5.** कथन है **6.** कथन नहीं है

7. कथन है **8.** कथन नहीं है **9.** कथन है

10. कथन है **11.** कथन नहीं है **12.** कथन (x पर निर्भर करता है।)

13. कथन नहीं है	**14.** कथन है	**15.** कथन नहीं है
16. कथन है	**17.** सत्य	**18.** असत्य
19. सत्य	**20.** सत्य	**21.** असत्य
22. असत्य	**23.** असत्य	**24.** सत्य
25. सत्य	**26.** सत्य	

प्रश्नावली 18.2

1. $p \wedge q$: ठण्डक है और वर्षात हो रही है।

$p \vee q$: ठण्डक है या वर्षात हो रही है।

2. (i) $p \vee q$: आज वर्षात हो रही है या इस कक्ष में बीस कुर्सियां हैं।

(ii) $\sim p$: आज वर्षात नहीं हो रही है।

(iii) $\sim q$: यह असत्य है कि इस कमरे में बीस कुर्सियां हैं।

(iv) $\sim p \vee q$: आज वर्षात नहीं हो रही है या इस कक्ष में बीस कुर्सियां हैं।

(v) $p \wedge q$: आज वर्षात हो रही है और इस कक्ष में बीस कुर्सियां हैं।

3. (i) $p \wedge q$; p : आकाश नीला है ; q : घास हरी है।

(ii) $p \vee q$; p : जावेद समाचार पत्र A पढ़ता है ; q : जावेद समाचार पत्र B पढ़ता है।

(iii) $p \wedge q$; p : अशोक समाचार पत्र X पढ़ता है ; q : अशोक समाचार पत्र Y पढ़ता है।

(iv) $\sim p$; p : घास हरी है।

(v) $\sim(\sim p)$; p : आकाश नीला है।

4. मैं टेनिस खेलना नहीं पसंद करता हूं और मैं फुटबाल खेलना नहीं पसंद करता हूं।

5. (a) हां (b) नहीं

6. राम न तो फुर्तीला है न स्वस्थ

7. $x \leq 7$ और $x \geq 7$ या $x = 7$.

8. मृदुल निर्दयी नहीं है और वह सख्त नहीं है।

9. x एक अपरिमेय संख्या है।

10. आकाश नीला नहीं है या $2 \geq 7$.

11. एक त्रिभुज है जो वर्ग नहीं है।

12. मिनी न तो फुर्तीली है न सुन्दर।

13. प्रत्येक परिमेय संख्या एक वास्तविक संख्या नहीं है।

14. $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या नहीं है।

15. एक समिश्र संख्या है जो वास्तविक संख्या नहीं है।

प्रश्नावली 18.3

1.

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$
T	T	T	F
T	F	T	F
F	T	T	F
F	F	F	T

2.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \wedge (\sim q)$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

3.

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee \sim p$
T	T	F	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	F	T

4.

p	$\sim q$	$\sim q$	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee \sim q$
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
F	T	F	T	T
F	F	T	F	T

5.

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$\sim(p \vee \sim q)$
T	T	F	T	F
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	T	F

6.

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	T	F	T	T
F	F	T	F	T
F	F	F	F	F

7.

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	T	T
F	T	F	T	F
F	F	T	F	F
F	F	F	F	F

8.

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	F
T	F	F	F	F
F	T	T	F	F
F	T	F	F	F
F	F	T	F	F
F	F	F	F	F

9.

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	F	T
F	T	F	F	F
F	F	T	F	T
F	F	F	F	F

10.

p	q	r	$p \wedge q$	$\sim r$	$(p \wedge q) \vee (\sim r)$
T	T	T	T	F	T
T	T	F	T	T	T
T	F	T	F	F	F
T	F	F	F	T	T
F	T	T	F	F	F
F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	F	F
F	F	F	F	T	T

11.

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$(p \wedge q) \vee (\sim (p \wedge q))$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

प्रश्नावली 18.4

1. विरोधोक्ति
2. विरोधोक्ति
3. पुनरुक्ति
4. विरोधोक्ति
5. विरोधोक्ति
6. पुनरुक्ति
7. विरोधोक्ति
8. पुनरुक्ति

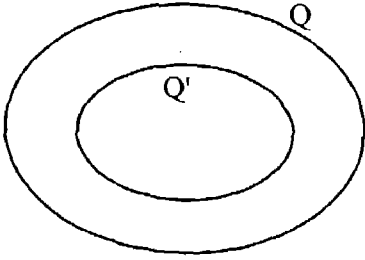
प्रश्नावली 18.5

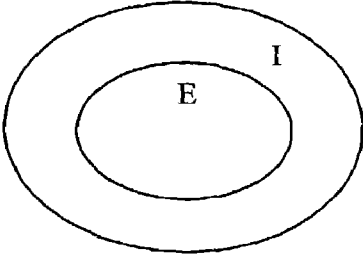
1. तर्कतः समतुल्य
2. तर्कतः समतुल्य
3. तर्कतः समतुल्य
4. तर्कतः समतुल्य
5. तर्कतः समतुल्य नहीं
6. तर्कतः समतुल्य नहीं
7. तर्कतः समतुल्य नहीं
8. तर्कतः समतुल्य नहीं
9. तर्कतः समतुल्य नहीं
10. तर्कतः समतुल्य नहीं
11. तर्कतः समतुल्य नहीं
12. तर्कतः समतुल्य
13. तर्कतः समतुल्य
14. तर्कतः समतुल्य
15. तर्कतः समतुल्य

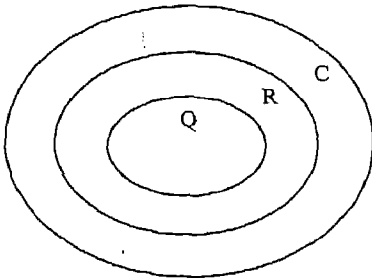
प्रश्नावली 18.6

1. $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$
2. $(p \wedge \sim q) \vee \sim p$
3. $\sim (p \wedge q) \vee (p \wedge \sim (q \vee \sim s))$
4. $(p \vee q) \vee c$
5. $(p \vee q) \wedge r$
6. $\sim p \vee [\sim q \vee (p \wedge q) \vee \sim r]$
7. $(p \vee q) \wedge t$
8. $(p \vee q) \vee t$
9. $(p \wedge q) \vee c$
10. $(p \wedge q) \wedge c$
11. $(p \wedge q) \wedge t$
12. $(p \wedge q) \vee t$

15. राम स्वस्थ है और गरिमा सुन्दर है।
16. मैं आलू चिप्स पसन्द करता हूं या टमाटर सूप।
17. मार्क या अयूब जंगल गए।
18. उपमा गायिका है और अल्मा नर्तकी है।
19. सोहन या शर्मिला उर्दू नहीं पढ़ते हैं।
20. दीपक एक डाक्टर है और प्रिया एक अध्यापिका है।

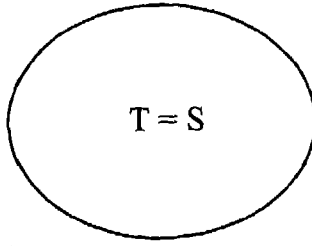
प्रश्नावली 18.7

Q = सभी द्विघात समीकरणों का समुच्चय।

Q′ = दो वास्तविक मूल वाले द्विघात समीकरणों का समुच्चय।

I = सभी समद्विबाहु त्रिभुजों का समुच्चय।

E = सभी समबाहु त्रिभुजों का समुच्चय।

C = सभी सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय।

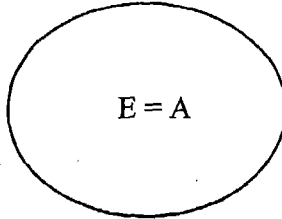
R = सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय।

Q = सभी परिमेय संख्याओं का समुच्चय।

4.

T = सभी अध्यापकों का समुच्चय

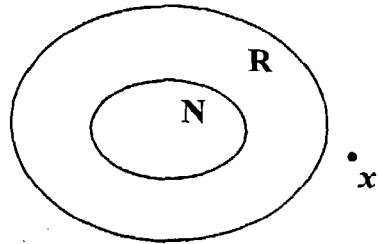
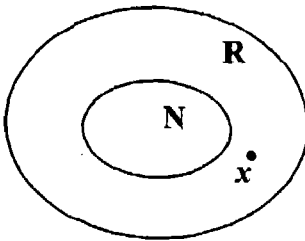
S = सभी विद्वज्जनों का समुच्चय

(ध्यान दीजिए कि समुच्चय T और S परस्पर आच्छादित करते हैं अतः वे एक ही समुच्चय हैं।)

5.

E = सभी समबाहु त्रिभुजों का समुच्चय

A = सभी समान कोणिक त्रिभुजों का समुच्चय

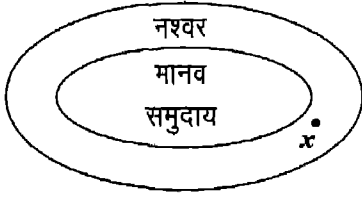
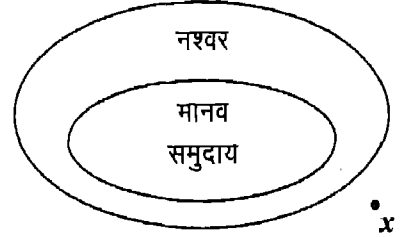
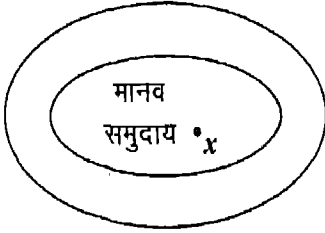
(ध्यान दीजिए कि समुच्चय E और A परस्पर आच्छादित करते हैं अतः वे एक ही समुच्चय हैं।)

6.

or

R = सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय

N = सभी प्राकृत संख्याओं का समुच्चय

x एक प्राकृत संख्या नहीं है।

7.

या

8.

9. अवैध	**10.** वैध	**11.** अवैध
12. अवैध	**13.** वैध	**14.** अवैध

प्रश्नावली 18.8

1. $(p \vee q) \wedge (r \vee (s \wedge u))$, जहां p, q, r, s और u s_1, s_2, s_3, s_4 और s_5. के संगत है।

2. $[(p \wedge q) \vee r] \wedge [(\sim p) \vee \{q \wedge (\sim r)\} \wedge [(\sim p) \vee (\sim q)]$

3.

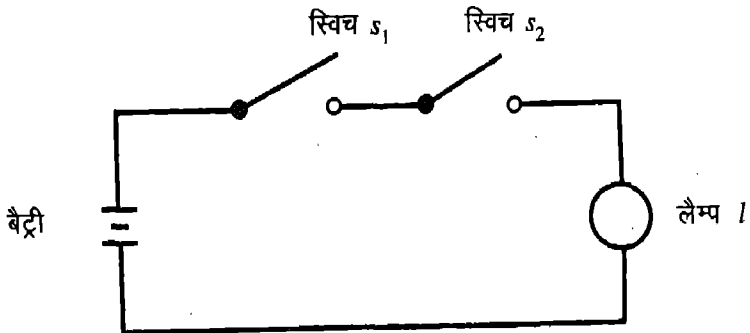
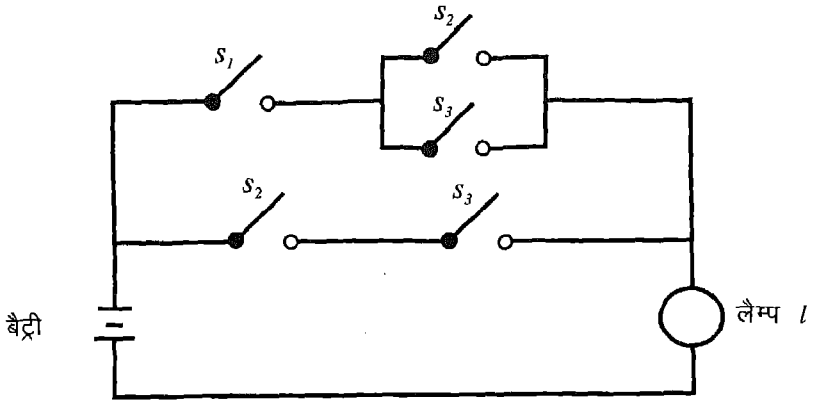
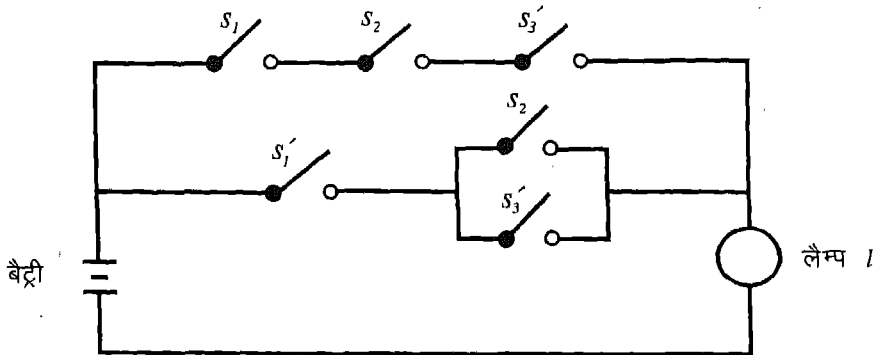
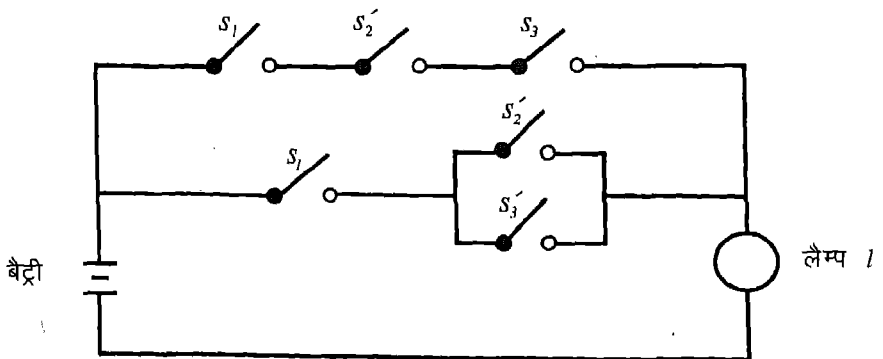
4.

S_1
S_2
S_3
S_2
S_3
बैट्री
लैम्प l

5.

S_1
S_2
S_3'
S_2
S_1'
S_3'
बैट्री
लैम्प l

6.

S_1
S_2'
S_3
S_2'
S_1
S_3'
बैट्री
लैम्प l

प्रश्नावली 19.1

1.	3	**2.**	1.1	**3.**	8.4
4.	2.33	**5.**	7.2	**6.**	6.32
7.	16	**8.**	3.39	**9.**	157.92
10.	11.288	**11.**	10.24	**12.**	8.7
13.	4.7	**14.**	8.4	**15.**	5.1
16.	12.5	**17.**	6 ; 5 और 6	**18.**	(i) 16.44 ; (ii) 16.44

प्रश्नावली 19.2

1.	9; 9.25	**2.**	7 ; 23.33	**3.**	$\frac{n+1}{2};\frac{n^2-1}{12}$
4.	19 ; 6.59	**5.**	100 ; 5.39	**6.**	64 ; 1.69
7.	107 ; 2276	**8.**	27 ; 132	**9.**	56 ; 422.33 ; 20.55

10. 43.5 सेमी. ; 5.55

11. समूह B का विचलन अधिक है। (विचलन A = 214.7, विचलन B = 229.7)

12. 21.5 ; 164.75

अध्याय 19 पर विविध प्रश्नावली

1. 4,8

2. 6,8

3. 24, 12

5. (i) 10.11, 1.997 (ii) 10.2 ; 1.99

प्रश्नावली 20.1

1. A: $(a, 0, 0)$, $(a, b, 0)$, B: $(0, b, 0)$, C: $(0, 0, c)$, E: $(0, b, c)$.

2. x, y, z from the YOZ, ZOX and XOY planes.

3. (i) $(-x, y, z)$ (ii) $(x, -y, z)$.

4. (i) XOYZ (ii) X′OYZ (iii) XOY′Z (iv) XOYZ′
(v) X′OY′Z (vi) X′OY′Z′ (vii) XOY′Z′ (viii) X′OYZ′.

5. (1, 2, 7), (– 1, 2, 7), (1, 2, – 7), (1, – 2, – 7), (– 1, – 2, 7), (– 1, 2, – 7), (– 1, – 2, – 7).

6. $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ और $(0, 0, c)$.

7. (i) (3,4,7) (ii) (–7, –2, –1) (iii) (5,4,3) (iv) (–4,0,1), (v) (–2,0,0).

8. $\sqrt{b^2+c^2}, \sqrt{a^2+c^2}, \sqrt{a^2+b^2}$.

9. 5, 5, 5.

प्रश्नावली 20.2

1. (i) $\sqrt{20}$ (ii) $\sqrt{43}$ (iii) $\sqrt{104}$ (iv) 4.

10. $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2},\right)$

प्रश्नावली 20.3

1. $\left(\frac{-4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5},\right)$, (– 8, 17, 27).

2. (– 4, 1, 2).

4. केन्द्रक

प्रश्नावली 20.4

1. $0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$.

3. (i) $5,1,1; \frac{5}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}$. (ii) $3,4,5; \frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{5}{5\sqrt{2}}$.

प्रश्नावली 20.5

1. $\frac{13}{7}$

2. 1

3. $\cos^{-1}\left(\frac{8}{21}\right)$

4. $\cos^{-1}\left(\frac{-11}{21}\right)$

अध्याय 20 पर विविध प्रश्नावली

1. 2, 2, 3.

2. (1, 0, 4), (1, –5, –1), (1, –5, 4), (–4, 0, –1), (–4, –5, 4), (–4, –5, –1), (–4, 0, 4)

$\left(-\frac{3}{2}, \frac{-5}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

3. $\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right), \frac{\sqrt{30}}{2}$.

4. $\left(\frac{38}{16}, \frac{57}{16}, \frac{17}{16}\right)$.

5. 3 : 4

प्रश्नावली 21.1

1. $\vec{a}+\vec{b}$.

2. $\vec{a}$ और $\vec{b}$ से बने समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण जिसका प्रारम्भिक बिन्दु उनके उभयनिष्ठ बिन्दु हैं, द्वारा निरूपित सदिश।

3. (i) हाँ (ii) हाँ (iii) नहीं (iv) या तो $k=0$ या $\vec{a}=\vec{0}$

5. $\overrightarrow{AC}=3(\vec{a}-\vec{b})$ और $\overrightarrow{BC}=4(\vec{a}-\vec{b})$.

6. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. अन्य सम्भावनाएं $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{b}=\vec{a}+\vec{c}$ और $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ हैं।

7. $\vec{b}-\vec{a}, -\vec{a}, -\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}$

प्रश्नावली 21.2

1. $0 \le |k\vec{a}| \le 12$

2. $\sqrt{3}$

3. $\frac{1}{7}(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})$

4. $-(6\hat{i}+5\hat{j}+2\hat{k}); \sqrt{65}$

5. $-2\hat{i}+10\hat{j}$

6. $\frac{7}{3}(-\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})$

7. $\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i}+\hat{j})$

8. $\frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$

9. $k^2=12$

10. $k^2=l^2$

प्रश्नावली 21.3

1. $3\vec{a}+5\vec{b}$

5. (a) (i) $0<\lambda<1$ (ii) $\lambda<1\ \lambda>1$ (b) (i) $-1<\lambda<0$ (ii) $\lambda<-1$

6. $\frac{9}{2}$, 6 और $\frac{15}{2}$

अध्याय 21 पर विविध प्रश्नावली

1. $a=2,\ b=-1$

3. $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

4. $(a_1-b_1)\hat{i}+(a_2-b_2)\hat{j}+(a_3-b_3)\hat{k}$, इत्यादि

   $\sqrt{\{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2\}}$, इत्यादि लम्बाइयां हैं।

5. 2 : 3

7. $\frac{1}{3}(2\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k})$

9. $3\vec{d}=-8\vec{a}+\vec{b}+12\vec{c}$

10. $\frac{1+\lambda+\mu}{\lambda(1+\mu)}$

11. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\hat{i}+\hat{j}\right)\hat{j},\frac{1}{2}\left(\hat{j}-\sqrt{3}\hat{i}\right)\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\hat{i}+\hat{j}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{i}+\hat{j}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{j}-\hat{i}\right)$

12. $x=2,\ y=-1$

13. $\sqrt{6},\frac{1}{2},\sqrt{114},\frac{1}{2},\sqrt{150}$

प्रश्नावली 22.1

1. (i) 500 रु. (ii) 100 रु. (iii) 800 रु. (iv) 30000 रु.
   (v) 6000 रु. (vi) 6000 रु. (vii) 37500 रु. (viii) 2400 रु.

2.	40000 रु.	**3.**	1875	**4.**	15 % , 3000 रु.
5.	14500 रु.	**6.**	$1\frac{1}{2}$ %, 375 रु.	**7.**	16500 रु.
8.	50000 रु., 8000 रु.	**9.**	312500 रु., 75000 रु.	**10.**	8 रु.
11.	15 रु.	**12.**	10 %	**13.**	5 लाख रु.
14.	(i) 6250 रु. (ii) No change	**15.**	(i) 12500 रु. (ii) 30000 रु.		

प्रश्नावली 22.2

1. (i) 7200 रु. (ii) 49500 रु. (iii) 1500 रु.

2. (i) 5400 रु. (ii) 3000 रु. (iii) 4800 रु.

3.	9500 रु.	**4.**	7334 रु.	**5.**	71250 रु.
6.	99000 रु.	**7.**	32640 रु.	**8.**	91800 रु.
9.	$4\frac{1}{6}$ %	**10.**	1.9 % (लगभग)	**11.**	300 रु. हानि
12.	200 रु. हानि	**13.**	1500 रु.	**14.**	500 रु.
15.	720 रु.	**16.**	3120 रु.	**17.**	1485 रु.
18.	855 रु.	**19.**	125 रु.	**20.**	23040 रु. प्रत्येक
21.	47320 रु. प्रत्येक	**22.**	42768 रु., 32076 रु.	**23.**	69696 रु., 95832 रु.

प्रश्नावली 22.3

1.	$5\frac{1}{3}$ %	**2.**	10.5 %	**3.**	3.8 %
4.	9 %	**5.**	8 %	**6.**	6.75 %
7.	9600 रु.; 9.6%	**8.**	5780 रु., 12.6% (लगभग)	**9.**	7920 रु., 10.7 %

अध्याय 22 पर विविध प्रश्नावली

1.	20000 रु.	**2.**	28000 रु.	**3.**	114 पर उपलब्ध 6% स्टाक
4.	120 पर उपलब्ध 5% स्टाक	**5.**	(i) 40000 रु. (ii) 200 रु.		
6.	600 रु.	**7.**	11040 रु., 16560 रु.		

8. (i) 98 पर उपलब्ध 5% स्टाक (ii) दोनों समान हैं।
   (iii) 95 पर उपलब्ध 5% स्टाक (iv) 122 पर उपलब्ध $4\frac{1}{2}$ % स्टाक

9. 5000 रु.; 3.97 %

10. 5.6 %

प्रश्नावली 23.1

1. (i) 19 (ii) 40 (iii) 127 (iv) 31.5 (v) 155
2. 4300 रु.
3. 12
4. 8
5. 2
6. 25
7. (i) 70 (ii) 166.79 (iii) 210
8. (i) 166.3 (ii) 40.61 (iii) 221.72 (iv) 76.36 (v) 116.67
9. $x = 3, y = 6$
10. $x = 9, y = 15$

प्रश्नावली 23.2

1. $Q_1 = 9$; $Q_3 = 17.5$; $D_3 = 11$; $D_6 = 14.5$; $D_8 = 19$
2. $D_7 = 24$; $P_{33} = 15.5$
3. $Q_3 = 10$; $D_5 = 9$
4. $Q_1 = 14, Q_3 = 20, D_6 = 18$; $P_{70} = 20$
5. 10 %
6. $Q_1 = 36.88$; $Q_3 = 62.22$
7. $P_{25} = 23.6$; $P_{60} = 44.12$; $P_{75} = 55$
8. 24.8 %
9. $D_4 = 30$; $P_{80} = 46$
10. 24

प्रश्नावली 23.3

1. 15
2. (i) 19 (ii) 16
3. (i) $x = 25$ (ii) 15
4. 38.33
5. 40
6. A : 18.93 ; B : 18.83

प्रश्नावली 24.1

1. 128.52
2. 138.95
3. 133.22
4. $x = 14, y = 36$
5. 129.1
6. 130.237
7. 127.88
8. $x = 20, y = 27$